

Problema 425 de triánguloscabri. Demostrar que es posible construir con regla y compás un triángulo ABC , conocidos el radio de su circunferencia circunscrita R , el radio de su circunferencia inscrita r y una altura del mismo. Establecer también las condiciones para que sea posible tal construcción y proporcionar alguna.

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Lema 1. En un triángulo ABC , (a) $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (fórmula de Euler), (b) $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ y (c) $II_a^2 = 4R(r_a - r)$.

Para la demostración de estas fórmulas consultar, por ejemplo, el trabajo *Útiles Simples para la Resolución de Problemas de Triángulos*¹ (problema 400 de esta revista), de Jose María Pedret.

Lema 2. En un triángulo ABC , con la notación habitual, $r_a = h_a r / (h_a - 2r)$.

Demostración. De las fórmulas del área $\frac{1}{2}ah_a = S = sr$ obtenemos $s = \frac{ah_a}{2r}$. Por otro lado, de las fórmulas $\frac{1}{2}ah_a = S = r_a(s - a)$ tenemos

$$\frac{ah_a}{2} = \left(\frac{ah_a}{2r} - a \right) r_a \Rightarrow h_a r = (h_a - 2r) r_a \Rightarrow r_a = \frac{h_a r}{h_a - 2r}.$$

Lema 3. Si I es el incentro de ABC , entonces $AI^2 = 2R(h_a - 2r)$.

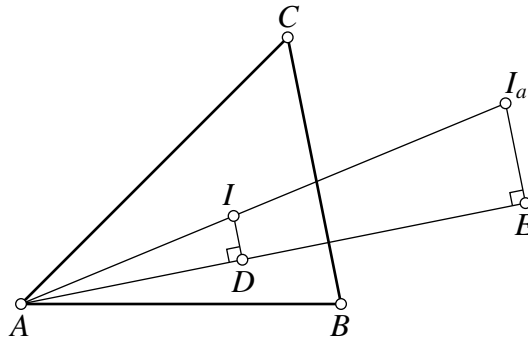


FIGURA 1

¹<http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/400Ped1utiles.htm>

Demostración. Usando los triángulos semejantes ADI , AEI_a de la Figura 1,

$$\frac{AI + II_a}{AI} = \frac{h_a + r_a}{h_a - r} \Rightarrow AI = II_a \cdot \frac{h_a - r}{r + r_a} = 2\sqrt{R(r_a - r)} \frac{h_a - r}{r + r_a}.$$

Entonces de las relaciones

$$\begin{aligned} r_a - r &= \frac{h_a r}{h_a - 2r} - r = \frac{2r^2}{h_a - 2r}, \\ r + r_a &= \frac{h_a r}{h_a - 2r} + r = \frac{2h_a r - 2r^2}{h_a - 2r} = \frac{2r(h_a - r)}{h_a - 2r} \end{aligned}$$

obtenemos la fórmula para la distancia AI :

$$AI = 2\sqrt{R \cdot \frac{2r^2}{h_a - 2r} \cdot \frac{h_a - r}{2r}} = \sqrt{2R(h_a - 2r)}.$$

Solución del problema 425

Teniendo en cuenta que la distancia $d = OI = \sqrt{R(R - 2r)}$ es la media geométrica de R y $R - 2r$ y que la distancia $d_a = AI = \sqrt{2R(h_a - 2r)}$ es la media geométrica de $2R$ y $h_a - 2r$, la idea de la construcción es como sigue:

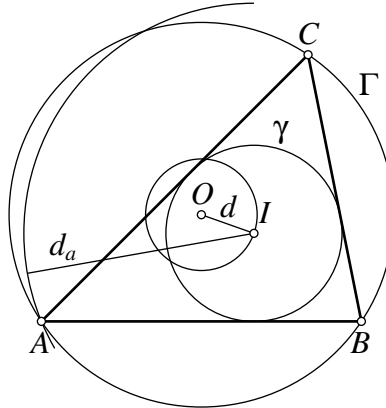


FIGURA 2

1. Fijamos un punto O y trazamos una circunferencia Γ de centro O y radio R , que será la circunferencia circunscrita al triángulo buscado ABC .

2. Trazamos una circunferencia con centro O y radio d . Esta circunferencia contendrá al incentro I . Tenemos libertad para elegir como I a cualquier punto de esta circunferencia.
3. Trazamos una circunferencia γ con centro I y radio r , que será la circunferencia inscrita al triángulo ABC .
4. Trazamos una circunferencia con centro I y radio $d_a = IA$, que cortará a la circunferencia Γ en un punto A , primer vértice del triángulo buscado.
5. Los otros dos vértices del ABC se obtendrán trazando desde A las rectas tangentes a la circunferencia γ , y hallando la intersección de estas rectas con Γ .

Discusión de la solución

De las fórmulas de d y d_a se deduce que para que el problema tenga solución es necesario que $R \geq 2r$ y $h_a \geq 2r$. Esto no es suficiente, ya que según la construcción anterior, será necesario también que la circunferencia con centro I y radio d_a sea secante a la circunferencia de centro O y radio R , lo que puede expresarse con la desigualdad

$$|R - d_a| \leq d \leq R + d_a,$$

que después de algunos cálculos lleva a

$$R + r - \sqrt{R(R - 2r)} \leq h_a \leq R + r + \sqrt{R(R - 2r)}. \quad (1)$$

Construcción con Cabri

La discusión realizada lleva a una construcción con Cabri en la que r puede ser arbitrario, R varía con la condición de que $R \geq 2r$, y h_a varía cumpliendo (1).

Así, en la figura 3, hemos hecho la construcción de la siguiente forma:

1. Trazamos la circunferencia de centro O y radio R .
2. Sobre un diámetro DE marcamos un punto F tal que $FO = R - 2r$.

3. Por O levantamos una perpendicular que corta a la circunferencia con diámetro FE en I , el incentro del triángulo buscado.
4. Trazamos la circunferencia con centro I y radio r , la circunferencia inscrita al triángulo buscado.
5. Sobre la recta DE marcamos un punto G tal que $GD = h_a - 2r$.
6. Por D trazamos una perpendicular que corta a la circunferencia con diámetro GE en H .
7. Trazamos una circunferencia con centro I y radio DH , que corta a la circunferencia con centro O y radio R en A , primer vértice del triángulo buscado.
8. Trazamos las rectas tangentes desde A a la circunferencia con centro I y radio r , que cortan a la circunferencia con centro O y radio r en los otros dos vértices B y C del triángulo buscado.

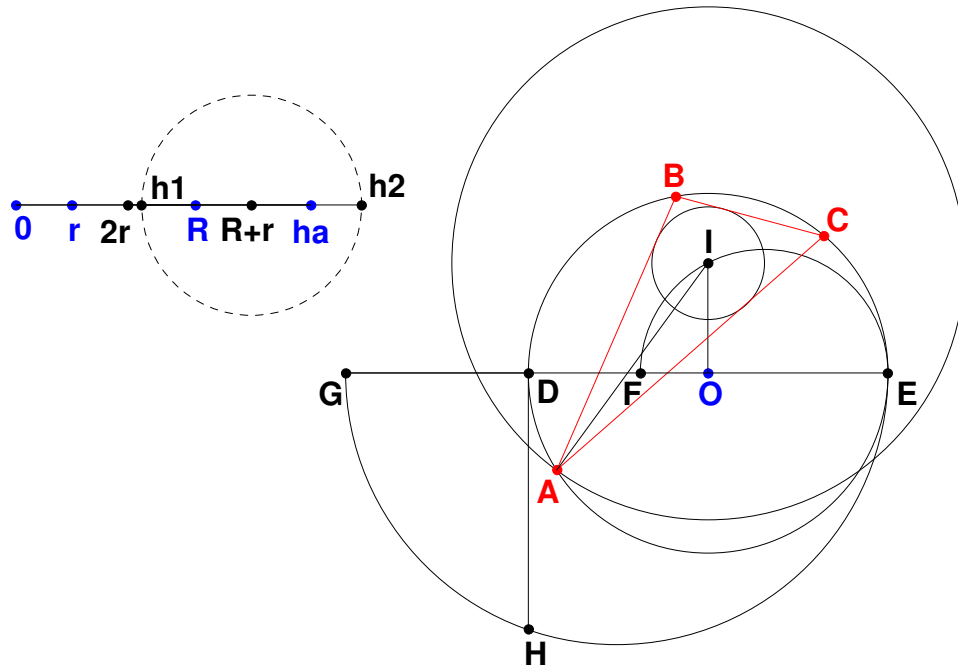


FIGURA 3