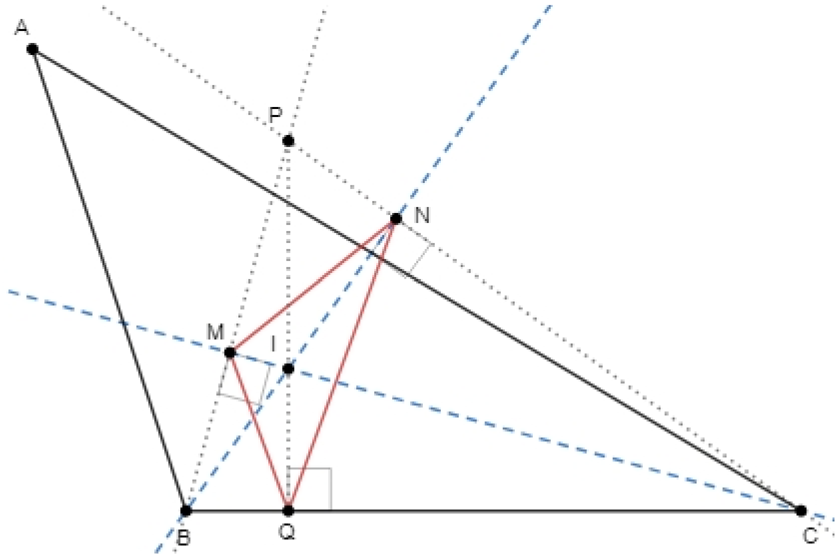
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 428. (Romero, J.B. (2007)) Dado un triángulo ABC con incentro I, las rectas perpendiculares a las bisectrices CI y BI pasando por los puntos B y C, respectivamente, intersecan a dichas bisectrices en los puntos M y N, respectivamente, y se cortan entre sí en el punto P. Si llamanos Q a la proyección ortogonal del punto P sobre la recta BC, probar que el triángulo QNM (cuyo ortocentro es el punto I) es inversamente semejante al triángulo ABC.



Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $I=(a:b:c)$, entonces:

$$\begin{cases} BI \equiv cx - az = 0 \\ CI \equiv bx - ay = 0 \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} BM \equiv (a-b)x + az = 0 \\ CN \equiv (a-c)x + ay = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} M = (a:b:b-a) \\ N = (a:c-a:c) \\ P = (a:c-a:b-a) \Rightarrow Q = (0:a+b-c:a-b+c) \end{cases}$$

por lo que:

$$\begin{cases} \dfrac{MN^2}{a^2} = \dfrac{\dfrac{a^2(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}{a^2} = \dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} \\ \dfrac{NQ^2}{b^2} = \dfrac{\dfrac{b(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}{b^2} = \dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} \\ \dfrac{QM^2}{c^2} = \dfrac{\dfrac{c(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}{c^2} = \dfrac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{a} = \frac{NQ}{b} = \frac{QM}{c}$$

Miguel-Ángel Pérez García Ortega

y, por tanto, el triángulo QNM es semejante a triángulo ABC, siendo la razón de semejanza:

$$k = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$$

Además, esta semejanza es inversa, ya que los vértices homólogos de ambos triángulos tienen orientaciones inversas.