

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 431. (Romero, J.B. (2008)) Sea ABC un triángulo isósceles en A , con base fija a y $b=c$ variable. Sean r y R su inradio y su circunradio, respectivamente, y h_a la altura correspondiente al vértice A . Calcular:

$$\textcircled{1} \lim_{b \rightarrow a} \frac{R-2r}{(b-a)^2}$$

$$\textcircled{2} \lim_{b \rightarrow a} \frac{2h_a - \sqrt{3} a}{b-a}$$

Solución:

Llamando S al doble del área del triángulo ABC y aplicando la Fórmula de Herón, se verifica que:

$$S = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$$

por lo que, si s es el semipérimetro del triángulo ABC , resulta que:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{S}{2s} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a+2b)} \\ R = \frac{ab^2}{2S} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \\ h_a = \frac{S}{a} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} \lim_{b \rightarrow a} \frac{R-2r}{(b-a)^2} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{\frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} - \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{(a+2b)}}{(b-a)^2} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{\frac{(b-a)^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}}{(b-a)^2} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3} a}$$

$$\textcircled{2} \lim_{b \rightarrow a} \frac{2h_a - \sqrt{3} a}{b-a} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{\sqrt{4b^2 - a^2} - \sqrt{3} a}{b-a} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{4(b^2 - a^2)}{(b-a)(\sqrt{4b^2 - a^2} + \sqrt{3} a)} = \lim_{b \rightarrow a} \frac{4(b+a)}{(\sqrt{4b^2 - a^2} + \sqrt{3} a)} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$