

Construir un triángulo $\widehat{ABC}$ del que se conoce el lado a y se verifique que $\widehat{BAM_a} = \hat{C} = \frac{2}{7}\hat{B}$, siendo M_a el punto medio del lado BC .

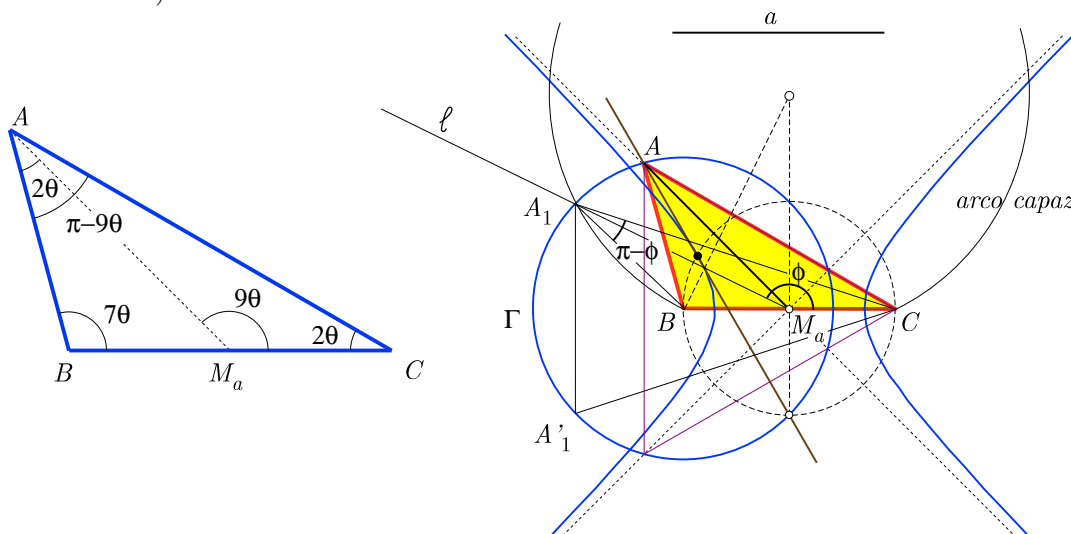
SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número 432.
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Propuesto por Alejandro Cipriano Coronel, estudiante universitario de ingeniería de la UNASAM (Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo), Huaraz-Ancash-Perú; con el siguiente enunciado:

En un triángulo ABC se traza la mediana AM relativa a BC (M en BC); además la medida de los ángulos $\angle BAM = \angle MCA = 2X$ y $\angle ABM = 7X$. Halle "X".

Sobre el triángulo $\widehat{ABC}$ en el que se verifique que $2\theta = \widehat{BAM_a} = \hat{C} = \frac{2}{7}\hat{B}$, se tienen las medidas de ángulos que aparecen en la figura, donde M_a es el punto medio del lado BC de longitud dada $a = 2$ (tomamos, para facilitar la notación, $a/2$ como unidad).



El vértice A ha de estar en el arco capaz de $\pi - 9\theta$ sobre BC .

Tomemos una recta ℓ variable por M_a y sea ϕ el ángulo que ella forma con M_aC ; sobre ℓ tomamos el punto A_1 , desde el que se ve el segmento BC , bajo un ángulo de $\pi - \phi$ (es decir, A_1 está en el arco capaz de $\pi - \phi$ sobre BC , cuyo centro está en la intersección de la mediatriz a BC con la perpendicular a ℓ por B).

El lugar geométrico que describe A_1 , cuando ℓ gira alrededor de M_a , es la circunferencia Γ de centro en B y radio $\sqrt{2}a/2 = \sqrt{2}$, ya que BA_1 es constante, pues las proyecciones ortogonales de M_aA_1 sobre BC y sobre su perpendicular son, respectivamente, (poniendo $m = \tan \phi$),

$$\frac{-1 + \sqrt{2 + m^2}}{1 + m^2}, \quad \frac{m(-1 + \sqrt{2 + m^2})}{1 + m^2},$$

y se tiene

$$\overline{BA_1}^2 = \left(1 + \frac{-1 + \sqrt{2 + m^2}}{1 + m^2}\right)^2 + \left(\frac{m^2(-1 + \sqrt{2 + m^2})}{1 + m^2}\right)^2 = 2.$$

En esta circunferencia Γ ha de estar el vértice A del triángulo buscado.

Si A_1 es un punto en la circunferencia Γ y A'_1 es su simétrico respecto a BC , hay que determinar entre los triángulos isósceles $\widehat{CA_1A'_1}$ aquellos para los que se verifique

$$9\widehat{A_1CB} = 2\widehat{A_1M_aC},$$

(o equivalentemente, $9\widehat{A_2CB} = 2\widehat{A_2M_aC}$).

Las coordenadas de los vértices de $\widehat{CA_1A'_1}$, respecto al sistema de coordenadas cartesianas rectangular con origen en B y C en el eje de abscisas, son

$$C(2,0), \quad A_1\left(\frac{m^2 + \sqrt{2 + m^2}}{1 + m^2}, \frac{-m + m\sqrt{2 + m^2}}{1 + m^2}\right), \quad A'_1\left(\frac{m^2 + \sqrt{2 + m^2}}{1 + m^2}, -\frac{-m + m\sqrt{2 + m^2}}{1 + m^2}\right).$$

Si este triángulo es equilátero ($CA_1 = A_1A'_1$), se tiene que $m = 1$ ó $m = -1$. Para $m = 1$, $\phi = 135^\circ = 9 \cdot 15^\circ$ y $\widehat{A_1CB} = 30^\circ = 2 \cdot 15^\circ$, $\widehat{A_1BC} = 105^\circ = 7 \cdot 15^\circ$. (Para $m = 1$, $\phi = 45^\circ$ y $\widehat{A_1BC} = 15^\circ \neq 7 \cdot 15^\circ$).

Con lo que para $m = -1$, tenemos una solución al problema propuesto (esto no asegura que sea única).

Nota.- Existe la siguiente interpretación geométrica para el vértice A del triángulo $\widehat{ABC}$ obtenido:

Las mediatrices de los lados de lados A_1C y A'_1C de los triángulos isósceles $\widehat{CA_1A'_1}$, cuando A_1 varía en la circunferencia Γ , envuelven la hipérbola equilátera de focos B y C . Al intesechar la circunferencia Γ con las tangentes a esta hipérbola, en los puntos que corta a la circunferencia de diámetro BC , nos da el vértice A . Este vértice es también la intersección de una asíntota a la hipérbola con la circunferencia Γ .