

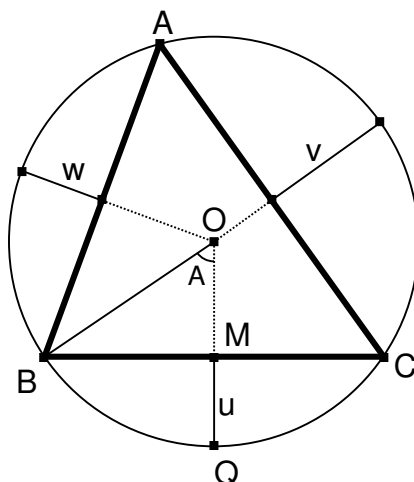
Problema 435 de *triángulos cabri*. Se tiene un triángulo inscrito en una circunferencia de centro O (O interior al triángulo); luego se trazan segmentos desde el punto medio de los lados a la circunferencia perpendicularmente a los lados, llamados sagitas o flechas. Se pide calcular el ÁREA del triángulo inscrito en función de u , v y w , siendo u , v y w las medidas respectivas de las flechas o sagitas.

Luis Ubaldo. Seminario de Áreas de Figuras Geométricas.

Propuesto por Alejandro Cipriano Coronel.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Nuestro razonamiento se basa en una serie de lemas. Justificamos un método de cálculo del área conociendo únicamente los valores de u , v y w .



Lema 1. Las sagitas u , v y w cumplen las relaciones

$$u = R(1 - \cos A),$$

$$v = R(1 - \cos B),$$

$$w = R(1 - \cos C).$$

Demostración. Observando la figura vemos, por ejemplo, que

$$u = MQ = OQ - OM = R - R \cos A = R(1 - \cos A).$$

□

El siguiente lema lo presentó en este Laboratorio Vicente Vicario García en la solución del problema 420:

Lema 2. *Los cosenos de los ángulos del triángulo ABC cumplen*

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= \frac{R+r}{R} \\ \cos A \cos B + \cos A \cos C + \cos B \cos C &= \frac{s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2} \\ \cos A \cos B \cos C &= \frac{s^2 - (2R+r)^2}{4R^2}\end{aligned}$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $a = 2R \sin A$ (teorema de los senos generalizado) y que $s - a = r \cot \frac{A}{2}$ (usando el triángulo rectángulo AXI , siendo I el incentro y X el punto de contacto de BC con la circunferencia inscrita),

$$\begin{aligned}s &= a + (s - a) = 2R \sin A + r \cot \frac{A}{2} = \\ &= 2R \sqrt{(1 - \cos A)(1 + \cos A)} + r \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}},\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado obtenemos

$$s^2 = 4R^2(1 - \cos A)(1 + \cos A) + 4Rr(1 + \cos A) + r^2 \cdot \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A},$$

y operando,

$$s^2(1 - \cos A) = 4R^2(1 - \cos A)^2(1 + \cos A) + 4Rr(1 - \cos^2 A) + r^2(1 + \cos A).$$

Al reagrupar obtenemos

$$4R^2 \cos^3 A - 4R(R+r) \cos^2 A + (s^2 + r^2 - 4R^2) \cos A + (2R+r)^2 - s^2 = 0,$$

por lo que $\cos A$ es una raíz del polinomio

$$4R^2 \lambda^3 - 4R(R+r) \lambda^2 + (s^2 + r^2 - 4R^2) \lambda - (s^2 - (2R+r)^2) = 0,$$

o bien,

$$\lambda^3 - \frac{R+r}{R} \lambda^2 + \frac{s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2} \lambda + \frac{s^2 - (2R+r)^2}{4R^2} = 0,$$

y lo mismo le ocurrirá a $\cos B$ y $\cos C$, por lo que fórmulas de Cardano-Vietta para este polinomio dan las relaciones buscadas. $\square$

Lema 3. Las cantidades $1 - \cos A$, $1 - \cos B$, $1 - \cos C$ cumplen

$$(1 - \cos A) + (1 - \cos B) + (1 - \cos C) = \frac{2R - r}{R} \quad (1)$$

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B) + \dots = \frac{s^2 + r^2 - 8Rr}{4R^2} \quad (2)$$

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) = \frac{r^2}{2R^2} \quad (3)$$

Demostración. Basta desarrollar los términos del primer miembro y usar las relaciones vistas en el Lema 2. Así, para demostrar (1) hacemos

$$\begin{aligned} & (1 - \cos A) + (1 - \cos B) + (1 - \cos C) \\ &= 3 - (\cos A + \cos B + \cos C) = 3 - \frac{R + r}{R} = \frac{2R - r}{R}. \end{aligned}$$

Análogamente, para demostrar (2) desarrollamos

$$\begin{aligned} & (1 - \cos A)(1 - \cos B) + (1 - \cos B)(1 - \cos C) + (1 - \cos C)(1 - \cos A) \\ &= 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \\ & \quad + \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A \\ &= 3 - \frac{2(R + r)}{R} + \frac{s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2} = \frac{12R^2 - 8R^2 - 8Rr + s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2} \\ &= \frac{s^2 + r^2 - 8Rr}{4Rr}. \end{aligned}$$

Y, ahora obtenemos (3):

$$\begin{aligned} & (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) = 1 - (\cos A + \cos B + \cos C) \\ & \quad + (\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) - \cos A \cos B \cos C \\ &= 1 - \frac{R + r}{R} + \frac{s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2} - \frac{s^2 - (2R + r)^2}{4R^2} \\ &= 1 - 1 - \frac{r}{R} + \frac{r^2}{4R^2} - 1 + \frac{4R^2 + 4Rr + r^2}{4R^2} = \frac{r^2}{2R^2}. \end{aligned}$$

□

Lema 4. Las sagitas u , v y w cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} u + v + w &= 2R - r, \\ uv + vw + wu &= \frac{s^2 + r^2 - 8Rr}{4}, \\ uvw &= \frac{Rr^2}{2}. \end{aligned}$$

Demostración. Se deduce del Lema 1 y del Lema 3, multiplicando las relaciones obtenidas en el Lema 3 por R , R^2 y R^3 , respectivamente. $\square$

Lema 5. *El radio R satisface la ecuación*

$$4R^3 - 4(u + v + w)R^2 + (u + v + w)^2R - 2uvw = 0. \quad (4)$$

Demostración. Del Lema 4 tenemos que

$$\begin{aligned} uvw &= \frac{Rr^2}{2} = \frac{R(2R - (u + v + w))^2}{2} \\ &= \frac{4R^3 - 4(u + v + w)R^2 + (u + v + w)^2R}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Solución del problema

Si conocemos los valores de u , v y w , al resolver la ecuación (4) podemos hallar R . Después, usando las relaciones del Lema 4 podemos hallar r y s . Finalmente, podemos obtener el área $S = sr$.

Ejemplo numérico

Para $u = 1$, $v = 2$, $w = 3$ tenemos que resolver la ecuación

$$4R^3 - 24R^2 + 36R - 12 = 0 \Rightarrow R^3 - 6R^2 + 9R - 3 = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$R_1 = 3.879385242, \quad R_2 = 0.4679111138, \quad R_3 = 1.652703645,$$

de las cuales sólo podemos aceptar R_1 ya que las otras dos soluciones son menores que 3, la mayor de las sagitas.

Con este valor $R = R_1$ hallamos $r = 2R - (u + v + w) = 1.758770483$ y

$$s = \sqrt{4(uv + vw + wu) + 8Rr - r^2} = 9.77191447,$$

que dan un valor para el área de

$$S = sr = 17.18655474.$$