

Del lema 4 de a solución de Francisco Javier García Capitán.

$$u + v + w = 2R - r \quad uv + vw + wu = \frac{s^2 + r^2 - 8Rr}{4} \quad uvw = \frac{Rr^2}{2}$$

Si escribimos

$$S = u + v + w \quad D = uv + vw + wu \quad P = uvw \quad \Delta^3 = 54P - S^3 + 6\sqrt{3}\sqrt{27P^2 - PS^3}$$

Nos quedan las dos ecuaciones

$$S = 2R - r \quad P = \frac{Rr^2}{2}$$

que resueltas en r y en R da tres soluciones

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{2S}{3} + \frac{S^2}{3\Delta} + \frac{1}{3}\Delta \right) \quad r = -\frac{S}{3} + \frac{S^2}{3\Delta} + \frac{1}{3}\Delta$$

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{2S}{3} - \frac{S^2}{6\Delta} + \frac{iS^2}{2\sqrt{3}\Delta} - \frac{1}{6}\Delta - \frac{i\Delta}{2\sqrt{3}} \right) \quad r = -\frac{S}{3} - \frac{(1-i\sqrt{3})S^2}{6\Delta} - \frac{1}{6}(1+i\sqrt{3})\Delta$$

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{2S}{3} - \frac{S^2}{6\Delta} - \frac{iS^2}{2\sqrt{3}\Delta} - \frac{1}{6}\Delta + \frac{i\Delta}{2\sqrt{3}} \right) \quad r = -\frac{S}{3} - \frac{(1+i\sqrt{3})S^2}{6\Delta} - \frac{1}{6}(1-i\sqrt{3})\Delta$$

De estas soluciones podemos desechar las dos últimas que son conjugadas entre sí y no proporcionarían valores reales y únicos del área.

Por lo tanto, si sustituimos la primera solución en la tercera ecuación

$$D = \frac{s^2 + r^2 - 8Rr}{4}$$

nos queda

$$s^2 = \frac{S^4 + 2S^3\Delta + 12D\Delta^2 - S^2\Delta^2 + 2S\Delta^3 + \Delta^4}{3\Delta^2}$$

y como el área del triángulo es

$$A = rs$$

de donde

$$A=\frac{(S^2-S\Delta+\Delta^2)\sqrt{S^4+2S^3\Delta+(12D-S^2)\Delta^2+2S\Delta^3+\Delta^4}}{3\sqrt{3}\Delta^2}=$$

$$\frac{\left(\begin{array}{l} (u+v+w)^2 \\ -(u+v+w)\left(54uvw-(u+v+w)^3+6\sqrt{3}\sqrt{27u^2v^2w^2-uvw(u+v+w)^3}\right)^{1/3} \\ +\left(54uvw-(u+v+w)^3+6\sqrt{3}\sqrt{27u^2v^2w^2-uvw(u+v+w)^3}\right)^{2/3} \end{array}\right)\left(\begin{array}{l} (u+v+w)^4 \\ +2(u+v+w)^3\left(54uvw-(u+v+w)^3+6\sqrt{3}\sqrt{uvw(27uvw-(u+v+w)^3)}\right)^{1/3} \\ -(u+v+w)^2\left(54uvw-(u+v+w)^3+6\sqrt{3}\sqrt{uvw(27uvw-(u+v+w)^3)}\right)^{2/3} \\ +12(vw+u(v+w))\left(54uvw-(u+v+w)^3+6\sqrt{3}\sqrt{uvw(27uvw-(u+v+w)^3)}\right)^{2/3} \\ +2(u+v+w)\left(54uvw-(u+v+w)^3+6\sqrt{3}\sqrt{uvw(27uvw-(u+v+w)^3)}\right) \\ +\left(54uvw-(u+v+w)^3+6\sqrt{3}\sqrt{uvw(27uvw-(u+v+w)^3)}\right)^{4/3} \end{array}\right)}{\left(3\sqrt{3}\left(54uvw-(u+v+w)^3+6\sqrt{3}\sqrt{27u^2v^2w^2-uvw(u+v+w)^3}\right)^{2/3}\right)}$$