

Problema 437 de triángulos cabri. Sea dado un cuadrilátero convexo $ABCD$ en el plano. Demostrar o refutar la existencia de un punto P en su interior de manera que las áreas de cada uno de los triángulos PAB , PBC , PCD , PDA sean todas iguales entre sí.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. EL SUR, Huelva

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Sean $D = (u : v : w)$ y $P = (x : y : z)$ las coordenadas baricéntricas homogéneas de dos puntos cualesquiera del plano del triángulo ABC . Las fórmulas que expresan el área con signo de los triángulo PAB , PBC , PCD , PDA son

$$(PAB) = \frac{1}{x+y+z} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{z}{x+y+z}, \quad (1)$$

$$(PBC) = \frac{1}{x+y+z} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{x}{x+y+z}, \quad (2)$$

$$(PCD) = \frac{1}{(x+y+z)(u+v+w)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{uy - vx}{(x+y+z)(u+v+w)}, \quad (3)$$

$$(PDA) = \frac{1}{(x+y+z)(u+v+w)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{wy - vz}{(x+y+z)(u+v+w)}. \quad (4)$$

Para que las cuatro cantidades sean iguales, ha de ser, por (1) y (2), $x = z$, y luego, por (3) y (4), $uy = wy$.

a) Consideremos primero el caso de que $u = w$, es decir, el punto D está sobre la mediana correspondiente al vértice B . Entonces, como además es $x = z$, al igualar (1) y (4) obtenemos

$$\frac{x}{2x+y} = \frac{uy - vx}{(2x+y)(2u+v)} \Rightarrow (2u+v)x + vx = uy \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2(u+v)}{u},$$

por lo que $P = (u : 2(u+v) : u)$, que es el punto medio de BD .

b) Consideremos ahora el caso de que $u \neq w$, es decir, el punto D no está sobre la mediana correspondiente al vértice B . Entonces tendremos $y = 0$, y como $x = z$ resultará que $P = (1 : 0 : 1)$ debe ser el punto medio del

lado CA . Además igualando las expresiones (1) y (4) obtenemos que debe cumplirse la relación

$$\frac{1}{2} = \frac{-v}{2(u+v+w)} \Rightarrow u + 2v + w = 0,$$

es decir D debe estar sobre la recta que une los puntos $X = (0 : -1 : 2)$ y $Z = (2 : -1 : 0)$, es decir, los puntos sobre las rectas BC y AB tales que $BX : XC = 2 : -1$ y $AZ : ZB = -1 : 2$, es decir X y Z son los simétricos de B respecto de C y A respectivamente.

En resumen:

- a) Si D está sobre la mediana del triángulo ABC correspondiente al vértice B , el punto buscado P es el punto medio del segmento BD .
- b) Si D no está sobre la mediana del triángulo ABC correspondiente al vértice B , el punto P existirá si y solo si D está sobre la recta d resultante de aplicar a la recta CA una homotecia de razón 2 y centro B , y en ese caso, el punto P será el punto medio del lado CA (si queremos que $ABCD$ sea convexo, D deberá variar en la imagen por esa homotecia del segmento CA).