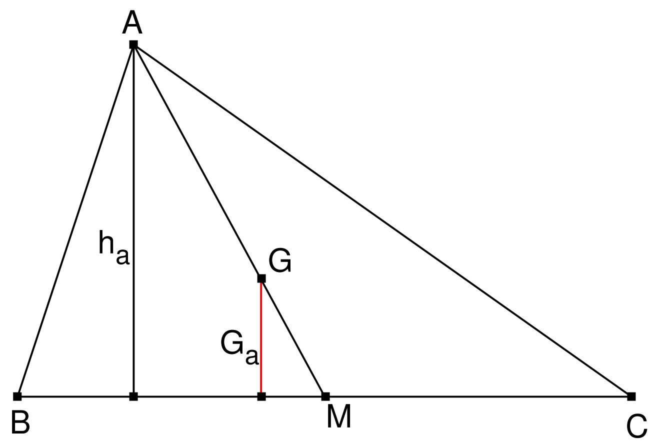
Problema 440 de *triánguloscabri*. *Sean ABC un triángulo y G su baricentro. Denotamos por G_a , G_b, G_c las distancias desde G a los lados BC, CA y AB del triángulo, respectivamente. Demostrar que $G_a + G_b + G_c = 3r$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo, y caracterizar cuándo se da la igualdad.*

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Hallemos la expresión de G_a. Usamos, como se muestra en la figura que el baricentro G divide a la mediana AM en la razón 2:1.



De ahí, que será

$$G_a = \frac{1}{3} \cdot h_a = \frac{1}{3} \cdot \frac{2S}{a} = \frac{2S}{3a},$$

siendo S el área del triángulo ABC, y h_a la altura relativa al vértice A.

Ahora usamos la desigualdad entre las medias aritmética y armónica de tres cantidades positivas x, y,z:

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \frac{3}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}} \Rightarrow x+y+z \geqslant \frac{9}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}},$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y = z$.

En nuestro caso tendremos

$$G_a + G_b + G_c \geqslant \frac{9}{\frac{1}{G_a}+\frac{1}{G_b}+\frac{1}{G_c}} = \frac{9}{\frac{3a}{2S}+\frac{3b}{2S}+\frac{3c}{2S}} = \frac{9(2S)}{3(2s)} = 3 \cdot \frac{S}{s} = 3r,$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si el triángulo es equilátero.