

Problema 442 de triángulos cabri. Se tiene un triángulo escaleno de lados a , b y c . Se pide demostrar que

$$S < \frac{\sqrt{abc(a+b+c)}}{4},$$

siendo S el área del triángulo.

Propuesto por Alejandro Cipriano Coronel.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Usaremos la desigualdad de Euler, según la cual es $R \geq 2r$, donde R y r son los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo, y donde la igualdad se cumple si y solo si el triángulo es equilátero.

También usaremos las fórmulas del área

$$S = sr = \frac{abc}{4R},$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{abc(a+b+c)}{16} - S^2 &= \frac{4RS(2s)}{16} - S^2 = \frac{RSs}{2} - S^2 = \frac{S}{2}(Rs - 2S) \\ &= \frac{S}{2}(Rs - 2sr) = \frac{Ss}{2}(R - 2r) \geq 0, \end{aligned}$$

Al ser escaleno nuestro triángulo, no es equilátero, por lo que la desigualdad es estricta, cumpliéndose que

$$S < \frac{\sqrt{abc(a+b+c)}}{4}.$$