

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 442. (Cipriano, A. (2008)) Dado un triángulo escaleno ABC con área Δ , probar que:

$$\Delta < \frac{\sqrt{abc(a+b+c)}}{4}$$

Solución:

Utilizando la Fórmula de Herón, como:

$$\Delta = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4}$$

entonces, tenemos que probar que:

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} &< \sqrt{abc(a+b+c)} \\ \sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} &< \sqrt{abc} \\ (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) &< abc\end{aligned}$$

y, para ello, vamos a utilizar la desigualdad existente entre la medias aritmética y geométrica. Como:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-a+b+c)(a-b+c) \leq \left(\frac{2c}{2}\right)^2 = c^2 \\ (a-b+c)(a+b-c) \leq \left(\frac{2a}{2}\right)^2 = a^2 \\ (a+b-c)(-a+b+c) \leq \left(\frac{2b}{2}\right)^2 = b^2 \end{array} \right.$$

dándose las igualdades si y sólo si $a = b$, $b = c$ y $c = a$, respectivamente, por lo que, al ser el triángulo ABC escaleno, se verifica que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-a+b+c)(a-b+c) < c^2 \\ (a-b+c)(a+b-c) < a^2 \\ (a+b-c)(-a+b+c) < b^2 \end{array} \right.$$

y, multiplicando término a término estas tres desigualdades, obtenemos que:

$$(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2 < a^2b^2c^2$$

lo cual equivale a que:

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) < abc$$