

De investigación

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. "EL SUR", Huelva

Problema 444

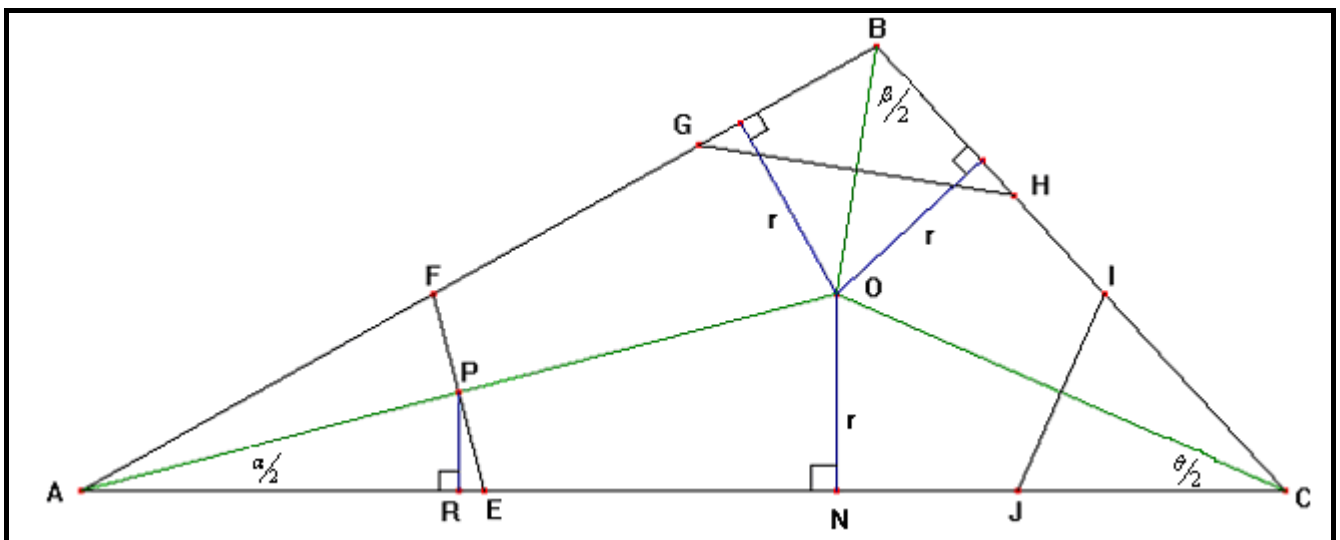
Sea un triángulo ABC. Hallar la probabilidad de que escogido al azar un punto en su interior, dicho punto diste menos de alguno de los vértices del triángulo que del incentro I del mismo. Expresar el resultado exclusivamente en función de razones trigonométricas de los ángulos del triángulo.

Vicario, V. (2007): Comunicación personal

Para que dicho punto, tomado al azar, diste menos de alguno de los vértices que del incentro, debe pertenecer al interior de alguno de los triángulos AFE ó GBH ó ICJ .

El triángulo AFE se obtiene trazando la mediatriz del segmento AO, determinando así los puntos F y E. De forma análoga se obtienen los triángulos GBC e ICJ.

$$\text{Luego } P = \frac{[AFE] + [GBH] + [ICJ]}{[ABC]}$$



1. Vamos a calcular $[AFE]$, $[GBH]$ y $[ICJ]$

1.1 Trazamos la altura del $\triangle APE = PR$, dicha altura es base media del $\triangle AON$, por lo tanto $PR = \frac{r}{2}$ (siendo r el inradio)

1.2 $\angle PER = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ (mirando el triángulo rectángulo APE). Luego $\angle EPR = \frac{\alpha}{2}$

1.3 Calculemos ahora $[APE] = (AR + RE) \frac{r}{4}$

$$AR = \frac{r}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \wedge \quad RE = \frac{r}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{Por lo tanto } [APE] = \left(\frac{r}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{r}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \frac{r}{4} = \frac{r^2}{8} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

$$\text{Como } [AFE] = 2[APE] = \frac{r^2}{4} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$$

$$\text{De forma análoga nos queda: } \begin{cases} [GBH] = \frac{r^2}{4} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \\ [ICJ] = \frac{r^2}{4} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \end{cases}$$

En este primer paso nos queda:

$$[AFE] + [GBH] + [ICJ] = \frac{r^2}{4} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

2. Calculemos ahora $[ABC]$

$$[ABC] = \frac{AB \cdot r}{2} + \frac{CB \cdot r}{2} + \frac{BA \cdot r}{2}$$

$$AB = AN + NC$$

$$AN = \frac{r}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \wedge \quad NC = \frac{r}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \text{ Entonces } AB = r \left(\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

$$\text{De forma análoga nos queda: } \begin{cases} BC = r \left(\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \\ BA = r \left(\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \end{cases}$$

En este segundo paso nos queda:

$$[ABC] = r^2 \left(\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

Por lo obtenido en los puntos 1 y 2, podemos decir que:

$$P = \frac{[AFE] + [GBH] + [ICJ]}{[ABC]} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4 \left(\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)}$$