Problema 444 de *triánguloscabri*. *Sea un triángulo ABC. Hallar la probabilidad de que, escogido al azar un punto en su interior, dicho punto diste menos de alguno de los vértices del triángulo que del incentro I del mismo. Expresar el resultado exclusivamente en función de razones trigonométricas de los ángulos del triángulo.*

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Como es habitual en este tipo de problemas, calcularemos la probabilidad pedida mediante un cociente de áreas. Consideramos la siguiente figura:

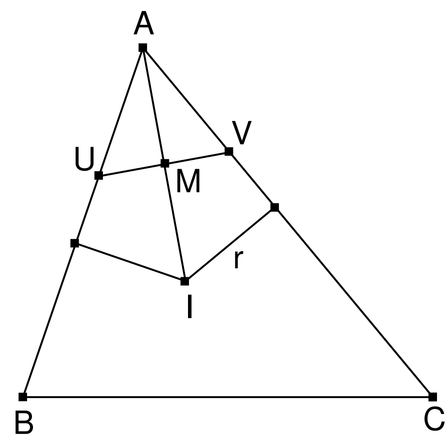

Figura 1

Hemos dibujado el triángulo ABC, su incentro I, el punto medio M del segmento AI, y los puntos U y V en que la mediatriz de este segmento corta a los lados AB y AC, respectivamente. También hemos marcado la distancia de I al lado CA, que será el radio r de la circunferencia inscrita.

$$UV = 2 \cdot MV = 2 \cdot AM \cdot \tan \frac{A}{2} = AI \cdot \tan \frac{A}{2},$$
$$AI = \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{A}{2}}.$$

Combinando estos resultados, el área del triángulo AUV será

$$\frac{UV \cdot AM}{2} = \frac{AI \cdot \tan \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{2} AI}{2} = \frac{AI^2 \tan \frac{A}{2}}{4} = \frac{r^2 \tan \frac{A}{2}}{4 \operatorname{sen}^2 A} = \frac{r^2}{4 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}$$
$$= \frac{r^2}{2 \operatorname{sen} A}.$$

Sumando las expresiones correspondientes a los tres vértices y dividiendo por el área S del triángulo ABC tendremos la probabilidad pedida:

$$\begin{aligned} p =& \frac{\frac{r^2}{2\operatorname{sen} A} + \frac{r^2}{2\operatorname{sen} B} + \frac{r^2}{2\operatorname{sen} C}}{S} = \frac{\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} A} + \frac{1}{\operatorname{sen} B} + \frac{1}{\operatorname{sen} C}\right)}{S} = \\ =& \frac{\frac{r^2}{2}\left(\frac{bc}{2S} + \frac{ca}{2S} + \frac{ab}{2S}\right)}{S} = \frac{r^2(bc+ca+ab)}{4S^2} = \frac{bc+ca+ab}{4s^2} \\ =& \frac{bc+ca+ab}{(a+b+c)^2}. \end{aligned}$$

Como el enunciado pide expresar el resultado en función de las razones trigonométricas del triángulo, teniendo en cuenta el teorema de los senos generalizado, escribimos:

$$p = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A}{(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)^2}.$$