Problema 445 de *triánguloscabri*. *Si el lado a de un triángulo ABC es igual al cociente de la suma de los cuadrados de los otros dos lados por la suma de estos lados, la recta KI que une el punto de Lemoine al centro del círculo inscrito, es paralela a aquel lado e igual a*

$$\frac{abc(b-c)}{2p(b^2+c^2)},$$

siendo p el semiperímetro.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

De Alba, L. (1901): Revista Trimestral de Matemáticas , Año I, pp.139-142, Diciembre, (número 4) (Problema 375).

Solución de Francisco Javier García Capitán.

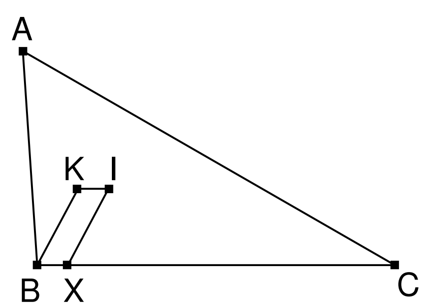
Usaremos coordenadas baricéntricas. Sabemos que $K=(a^2:b^2:c^2)$ y que $I=(a:b:c)$. Entonces la recta KI será paralela al lado BC cuando K e I estén alineados con el punto del infinito de la recta BC, es decir, cuando se anule el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & b^2 & c^2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a\left(b^2+c^2-a(b+c)\right),$$

y esto ocurrirá si y solo si

$$a=\frac{b^2+c^2}{b+c},$$

tal como afirma la primera parte del enunciado.



Para responder a la segunda parte del enunciado, trazamos por I una recta paralela a KB, cortando en X a BC. De esta forma formamos el paralelogramo $BKIX$, y será $KI=BX$.

Así, hallamos la recta BK, $c^2x - a^2z = 0$, y su punto del infinito, que es $(a^2 : -a^2 - c^2 : c^2)$. Entonces, la paralela por I a BK cortará a la recta BC en un punto $X = (0 : v : w)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & -a^2 - c^2 & c^2 \\ 0 & v & w \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ a & -a^2 - c^2 & c^2 \\ 0 & v & w \end{vmatrix} = 0 \\
\Rightarrow & v(ac - c^2) - w\left(a^2 + c^2 + ab\right) = 0,
\end{aligned}$$

y de aquí obtenemos

$$\frac{w}{v} = \frac{ac - c^2}{a^2 + c^2 + ab}.$$

Ahora hacemos

$$\begin{aligned}
\frac{BX}{a} =& \frac{BX}{BC} = \frac{BX}{BX + XC} = \frac{w}{v + w} = \frac{ac - c^2}{(a^2 + c^2 + ab) + (ac - c^2)} \\
=& \frac{ac - c^2}{a^2 + ab + ac} \Rightarrow BX = \frac{ac - c^2}{a + b + c}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$a - c = \frac{b^2 + c^2}{b + c} - c = \frac{b^2 + c^2 - bc - c^2}{b + c} = \frac{b(b - c)}{b + c},$$

podemos escribir

$$KI = BX = \frac{ac - c^2}{a + b + c} = \frac{c(a - c)}{2p} = \frac{bc(b - c)}{2p(b + c)} = \frac{abc(b - c)}{2p(b^2 + c^2)}.$$