**Problema 446 de *triánguloscabri*.** *$D$, $E$ y $F$ son los puntos medios de los lados $BC$, $CA$ y $AB$ de un triángulo. Una recta cualquiera que pase por $A$ corta a las rectas $DE$ y $DF$ en $G$ y $H$. Demostrar que $CG$ es paralela a $BH$.*

43. Aref, M.N., Wernick, W. (1968): Problems and Solutions in Euclidean Geometry. Dover Publications, Inc, New York. (pag. 59)

*Solución de Francisco Javier García Capitán.*

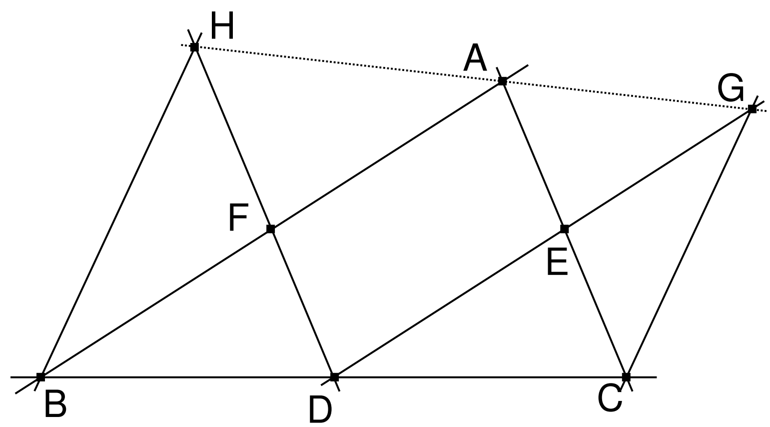


FIGURA 1

Tenemos que $D = (0 : 1 : 1)$, $E = (1 : 0 : 1)$ y $F = (1 : 1 : 0)$, por lo que las rectas $DE$ y $DF$ tienen ecuaciones $x + y - z = 0$ y $x - y + z = 0$, respectivamente. Una recta que pase por $A$ será de la forma $qy + rz = 0$, y cortará a las rectas $DE$ y $EF$ en los puntos $G = (q + r : -r : q)$ y $H = (q + r : r : -q)$, respectivamente.

Ahora tenemos en cuenta que si $P = (u_1 : v_1 : w_1)$ y $Q = (u_2 : v_2 : w_2)$ cumplen $u_1 + v_1 + w_1 = u_2 + v_2 + w_2$ entonces el punto del infinito de la recta $PQ$ es $J = (u_1 - u_2 : v_1 - v_2 : w_1 - w_2)$. En efecto, $J$ es un punto del infinito, ya que sus coordenadas suman cero y, además, es evidente que

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_1 - u_2 & v_1 - v_2 & w_1 - w_2 \end{vmatrix} = 0,$$

por lo que $P$, $Q$ y $J$ están alineados.

Usando esto, el punto del infinito de la recta $CG$, siendo $C = (0 : 0 : 2q)$ y $G = (q + r : -r : q)$ es $J = (q + r : -r : -q)$, y el punto del infinito de $BH$, siendo $B = (0 : 2r : 0)$ y $H = (q + r : r : -q)$ también es $J = (q + r : -r : -q)$, por lo que las rectas $CG$ y $BH$ son paralelas.

*Recíproco.* Si consideramos una recta $\ell$ cualquiera $px + qy + rz = 0$ y hacemos los cálculos vemos que el punto de intersección de $CG$ y $BH$ es $(-q - r : p + r : p + q)$, y este punto será infinito si y solo si $p = 0$, es decir si y solo si la recta $\ell$ pasa por $A$.