In memoriam.

<u>Problema 456</u>

En el triángulo ABC, D es un punto interior tal que:
<ABD=10º, <CBD=70º,<ACD=20º <BCD=40º
Probar que AD es perpendicular a BC.

Juan Carlos Salazar (2004): Comunicación personal

<u>Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba, España, como tributo a su memoria.</u>

Por ser el triángulo CBD isósceles, tenemos que BD=2·CD·sen20º.

Sean los triángulos ACD y ABD de ángulos en A, iguales a x e y, respectivamente, con x+y= 40º.

Entonces,

$$\left\{\begin{aligned} AD &= \frac{sen20º.CD}{senx} \\ AD &= \frac{2.sen10º.sen20º.CD}{seny} \end{aligned}\right. \Rightarrow 2.sen10º = \frac{seny}{senx}$$

Como y=40º−x, se tiene que

$$2.sen10º = \frac{seny}{senx} = \frac{sen40º.\cos x - senx.\cos 40º}{senx} = sen40º.\cot anx - \cos 40º$$

$$\cot anx = \frac{2.sen10º + \cos 40º}{sen40º} = \frac{2.sen10º + \cos 30º \cos 10º - sen30º.sen10º}{sen30º.\cos 10º + \cos 30º.sen10º}$$

$$\cot anx = \frac{2.sen10º + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10º - \frac{1}{2}.sen10º}{\frac{1}{2}.\cos 10º + \frac{\sqrt{3}}{2}.sen10º} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10º + \frac{3}{2}.sen10º}{\frac{1}{2}.\cos 10º + \frac{\sqrt{3}}{2}.sen10º} = \sqrt{3}$$

En definitiva, $\cot an\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 30º \quad (y = 10º)$

Así el segmento AD, al prolongarlo, cortará perpendicularmente al lado CB, **c.q.d.**