

Problema 458 de *triánguloscabri*. Consideramos un triángulo ABC y un punto cualquiera P . Sea $A'B'C'$ el triángulo ceviano de P . Consideramos los baricentros de los triángulos PBA' , PCA' , PCB' , PAB' , PAC' , PBC' .

1. Demostrar que los seis baricentros están en una misma cónica si y solo si el punto P está sobre una de las medianas.
2. Construir con regla y compás dos puntos sobre la mediana correspondiente al vértice A para los que la cónica resulta ser una parábola

Propuesto por Francisco Javier García Capitán

Solución de Francisco Javier García Capitán.

- Antes de comenzar hagamos la observación de que el enunciado 1. no es totalmente cierto, ya que existen puntos fuera de las medianas para los que los seis baricentros están sobre una misma cónica, observación que agradezco desde aquí a Ángel Montesdeoca.
- También que más que dar una solución del problema presentaremos la forma en que este problema surgió, como ejemplo del uso de las coordenadas baricéntricas y el programa de cálculo simbólico *Mathematica*, no sólo en la resolución de problemas sino también en la investigación de otros nuevos.

Planteamiento de un problema

En esta ocasión todo comenzó al leer un mensaje del foro *Hyacinthos*, en el que se hablaba de la configuración formada al considerar un triángulo ABC , un punto cualquiera P y el triángulo ceviano $A'B'C'$ de P . Entonces surgió, recordando mi problema 200 de este Laboratorio, considerar los baricentros de los triángulos PBA' , PCA' , PCB' , PAB' , PAC' , PBC' . Sabemos que cinco puntos están siempre sobre una cónica, pero

¿CUÁNDO ESTARÁN LOS SEIS BARICENTROS SOBRE UNA CÓNICA?

Para responder a esta pregunta cargamos el paquete `Baricentricas.nb`, que puede encontrarse en mi página web ¹:

```
<< Baricentricas`;
```

Definimos un punto cualquiera y hallamos su triángulo ceviano:

```
ptP = {u, v, w};
ptA1 = {0, v, w};
ptB1 = {u, 0, w};
ptC1 = {u, v, 0};
```

¹<http://garciacapitan.auna.com/baricentricas>

Hallamos los seis baricentros:

```
ptGab = Baricentro[{ptP, ptA, ptB1}];
ptGac = Baricentro[{ptP, ptA, ptC1}];
ptGbc = Baricentro[{ptP, ptB, ptC1}];
ptGba = Baricentro[{ptP, ptB, ptA1}];
ptGcb = Baricentro[{ptP, ptC, ptB1}];
ptGca = Baricentro[{ptP, ptC, ptA1}];
```

Hallamos la ecuación de la cónica que pasa por los cinco primeros:

```
conica5 = ConicaCincoPuntos[ptGab, ptGac, ptGbc, ptGba, ptGcb];
```

E imponemos la condición de que esta cónica pase por el sexto. La expresión siguiente debe anularse:

```
Factor[Sustituirxyz[conica5, ptGca]]
```

$$81 u (u - v) v (u + v)^2 (u - w) (v - w) w (u + w)^2 (v + w)^2 (u + v + w)^{12}$$

Análisis

Cada uno de los factores de la expresión obtenida corresponde a casos para los que los seis puntos estarán sobre una cónica.

Si $u = 0$, el punto P estará sobre la recta BC , y tendremos cuatro de los baricentros sobre esta recta. Entonces, los seis baricentros están en dos rectas paralelas, que es una cónica degenerada. Las mismas consideraciones hacemos cuando $v = 0$ o $w = 0$.

El caso de las medianas

Estudiemos ahora el caso en que $v = w$, es decir cuando P está sobre la mediana trazada por A . Cuando la cónica sea una parábola, se anula el discriminante de la ecuación de segundo grado resultante del sistema formado por la ecuación de la cónica y la recta del infinito. Para calcular este discriminante hacemos:

```
Factor[DiscriminanteConica[conica5] /. v -> w]
```

$$-26244 u w^6 (u + w)^8 (2u + w) (u + 2w)^{22} (u^2 + 5uw + 3w^2)$$

Examinando los factores vemos que esta expresión se anula en los siguientes casos, aunque la cónica no es una parábola en ninguno de ellos:

- $u = 0$. El punto es $(0 : 1 : 1)$, el punto medio del lado BC .
- $w = 0$. El punto es $(1 : 0 : 0)$, el vértice A .
- $2u + w = 0$. El punto es $(-1 : 2 : 2)$. En este caso tenemos
$$3P = -A + 2B + 2C = -A + 4A' \Rightarrow 4A' = A + 3P,$$
y A' divide a AP en la razón $3 : 1$, es decir P es el simétrico del baricentro respecto del punto medio.
- $2u + w = 0$. El punto es $(-2 : 1 : 1)$, el punto del infinito de la mediana.

Queda el caso en que $u^2 + 5uw + 3w^2 = 0$, que nos va a dar dos parábolas, como veremos a continuación. Para obtener los dos puntos sobre la mediana que cumplen $u^2 + 5uw + 3w^2 = 0$ hacemos

```
{ptP1, ptP2} = Map[Simplificar, {u, w, w} /. Solve[u^2 + 5 u w + 3 w^2 == 0, w]]
```

```
{{{6, -5 - Sqrt[13], -5 - Sqrt[13]}, {6, -5 + Sqrt[13], -5 + Sqrt[13]}}
```

¿Qué puntos son estos? ¿Como trazarlos con regla y compás? Hallemos su punto medio y la distancia de ellos, intentando buscar alguna información útil

```
ptU = Simplificar[Medio[ptP1, ptP2]]
```

```
{-4, -1, -1}
```

```
Simplify[CuadradoDistancia[ptP1, ptP2]]
```

```
- 13/9 (a^2 - 2 (b^2 + c^2))
```

¡Hemos tenido suerte! El punto $U = (4 : 1 : 1)$ cumple

$$6U = 4A + B + C = 4A + 2A' \Rightarrow 3U = 2A + A',$$

por lo que U divide a la mediana AA' en la razón 1:2, es decir, U es el punto medio del vértice A y el baricentro.

Además, $2(b^2 + c^2) - a^2$ es cuatro veces el cuadrado de la longitud de la mediana AA' , por lo que podemos expresar

$$UP_1^2 = \frac{P_1P_2^2}{4} = \frac{13}{9}m_a^2 = m_a^2 + \left(\frac{2m_a}{3}\right)^2,$$

que conduce a una sencilla construcción:

1. Hallamos el punto medio U del baricentro G y el vértice A .
2. Por el punto medio A' de BC trazamos una perpendicular a la mediana.
3. Trazamos con centro A' una circunferencia con radio la mediana $A'A$, que corta a la perpendicular anterior en W .
4. Con centro U y radio UW trazamos una circunferencia que corta a la mediana en los puntos buscados P_1 y P_2 .

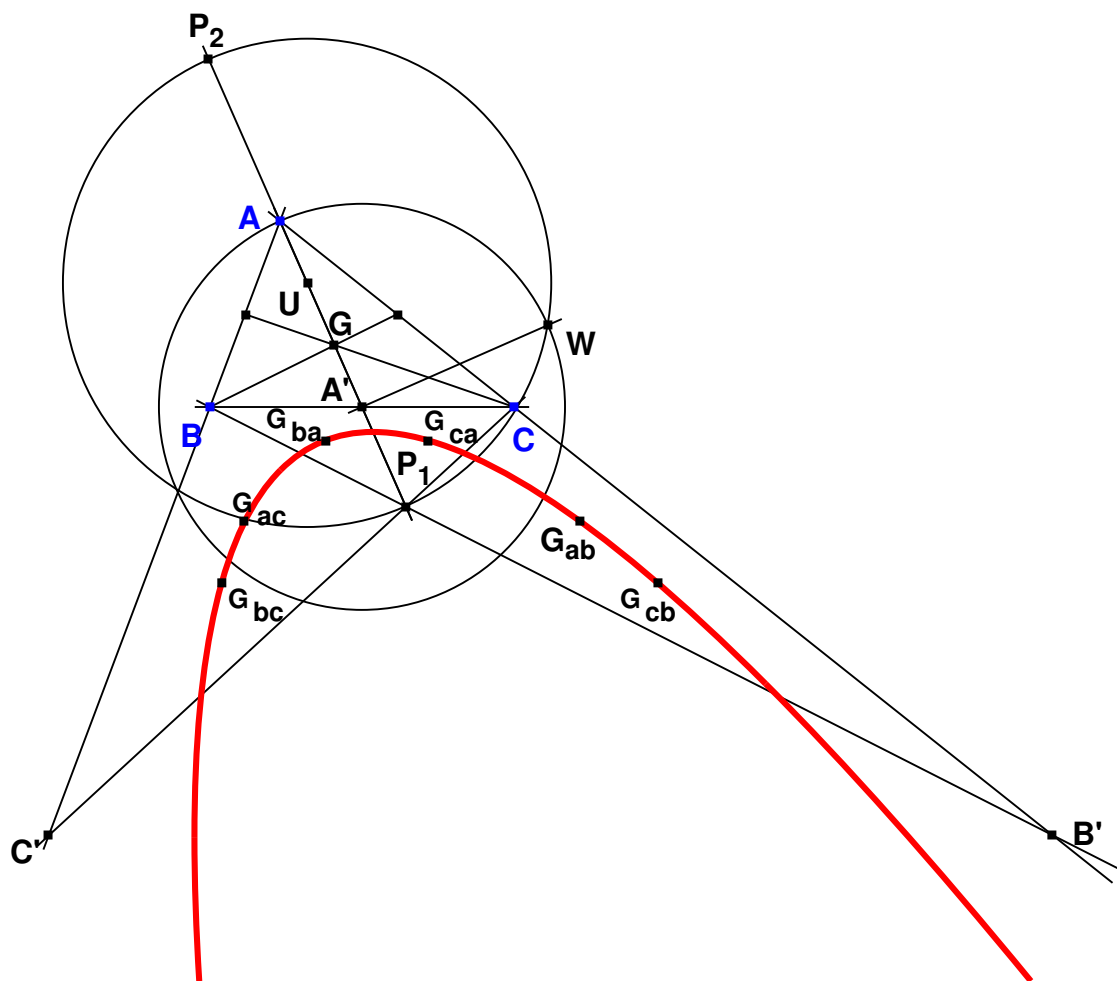


FIGURA 1

La Figura 1 muestra la parábola en el caso del punto P_1 .

El caso de las exmedianas

El factor $v + w$ cuando hicimos

Factor[Sustituirxyz[conica5, ptGca]]

$$81 u (u - v) v (u + v)^2 (u - w) (v - w) w (u + w)^2 (v + w)^2 (u + v + w)^{12}$$

indica que tendremos los seis puntos sobre una cónica cuando A esté sobre exmediana correspondiente a A , es decir la paralela por A a BC . Para ver el tipo de cónica hacemos, de forma parecida a lo hecho para la mediana,

Factor[DiscriminanteConica[conica5 /. v → -w]]

$$6561 u^{22} (u - w)^4 w^6 (u + w)^4 (u^2 - 3 w^2)^2$$

Será, como antes, el último factor el que dé lugar a parábolas. Para hallar los puntos en este caso hacemos

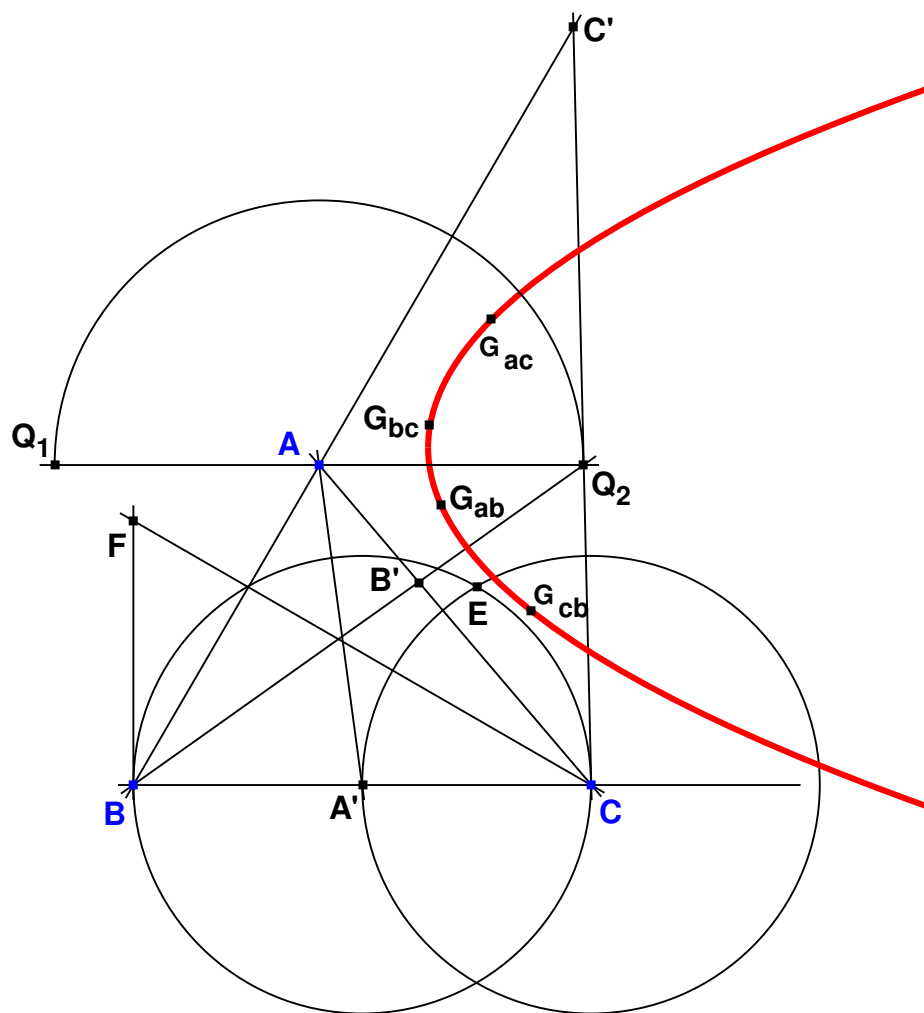
{ptQ1, ptQ2} = Map[Simplificar, {u, w, -w} /. Solve[u² - 3 w² == 0, w]]

$$\{\{3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, \{3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}\}$$

```
Simplificar[Medio[ptQ1, ptQ2]]
```

{1, 0, 0}

```
Simplify[CuadradoDistancia[ptQ1, ptQ2]]
```

$$\frac{4 a^2}{3}$$


La Figura 2 muestra una construcción de los puntos Q_1 y Q_2 . Teniendo en cuenta que la distancia de A a cada uno de ellos es $a/\sqrt{3}$, construimos el triángulo equilátero $EA'C$ y la bisectriz del ángulo ECB , que corta en F a la perpendicular por B a BC . Entonces tendremos que $BF = a/\sqrt{3}$, por lo que bastará trazar una circunferencia con radio A y radio BF , que cortará en Q_1 y Q_2 a la paralela por A a BC .