Construir un triángulo rectángulo conociendo la altura desde el ángulo recto y el perímetro.

SOLUCIÓN:

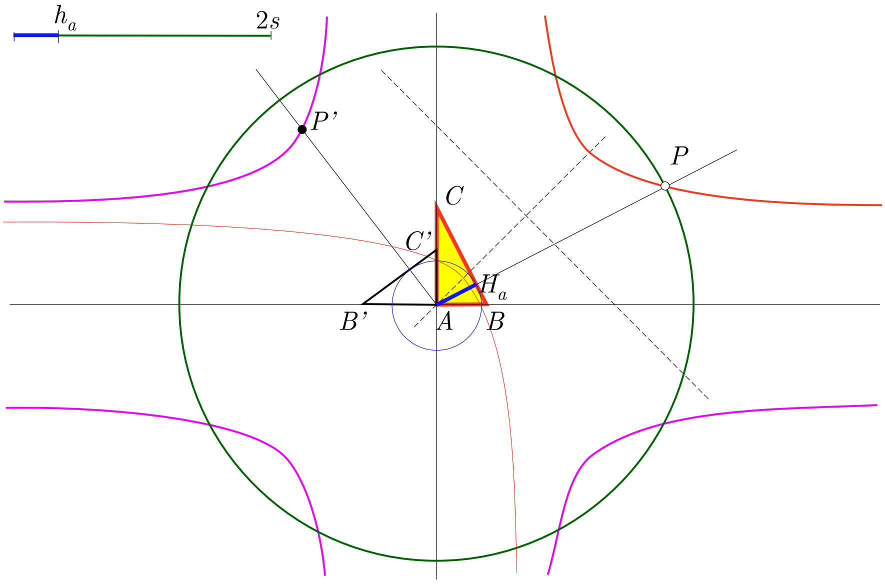
Se da aquí una solución (aunque no exactamente en el orden en que se propone) al Problema 466 del Laboratorio virtual de triángulos con Cabri II, para la segunda quincena de mayo del 2008.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid, con el siguiente enunciado:

> *En un triángulo rectángulo se conocen el perímetro $2p$ y la altura h correspondiente al ángulo recto y se pide obtener en función de p y h:*
> *1) Los tres lados del triángulo y su área.*
> *2) Condición para que el problema sea posible.*
> *3) Los radios del círculo inscrito y del círculo ex-inscrito correspondiente al ángulo recto.*
> *4) La distancia entre los centros de ambos círculos.*
> *5) Construcción geométrica del triángulo dados p y h. (Para ello conviene usar el círculo ex-inscrito indicado)*
> *Matemática Elemental (1933), Tomo II, N.1, Enero, propuesto en la ETSI de Caminos(1931) p.14, N. 39.*

— —



Respecto a un sistema de coordenadas rectangular, fijemos el vértice recto A en el origen y los catetos sobre los ejes. Si la altura desde el vértice A es h_a, que forma con el eje de abscisas un ángulo θ, y llamando b y c a la longitud de los catetos, se tiene que el perímetro de cualquier triángulo rectángulo $\widehat{AB'C'}$ que corresponde a los datos dados es

$$b+c+\sqrt{b^2+c^2}=\frac{h_a}{\cos\theta}+\frac{h_a}{\operatorname{sen}\theta}+\sqrt{\frac{h_a^2}{\cos^2\theta}+\frac{h_a^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}=h_a\frac{1+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

Para determinar el triángulo de perímetro $2s$, debemos encontrar los puntos comunes de las curvas, en coordenadas polares (de origen A y semieje polar, el de abscisas):

$$\rho=2s, \qquad \rho=h_a\frac{1+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}.$$

Estos son los que corresponden a

$$\cos\theta=\frac{h_a+s\pm\sqrt{s^2-2h_as-h_a^2}}{2s}, \qquad \operatorname{sen}\theta=\frac{h_a+s\mp\sqrt{s^2-2h_as-h_a^2}}{2s}.$$

Que tienen valores reales si

$$\boxed{h_a\leq(\sqrt{2}-1)s}$$

Además, con esta restricción los numeradores de las expresiones anteriores son siempre menores o iguales que los denominadores.

El extremos del radio vector AP' de longitud igual al perímetro del triángulo $\widehat{AB'C'}$, en la dirección del ángulo θ, describe una curva que en coordenadas cartesianas es el producto de los ejes por la hipérbola equilátera

$$xy - 2h_a x - 2h_a y - 2h_a^2 = 0.$$

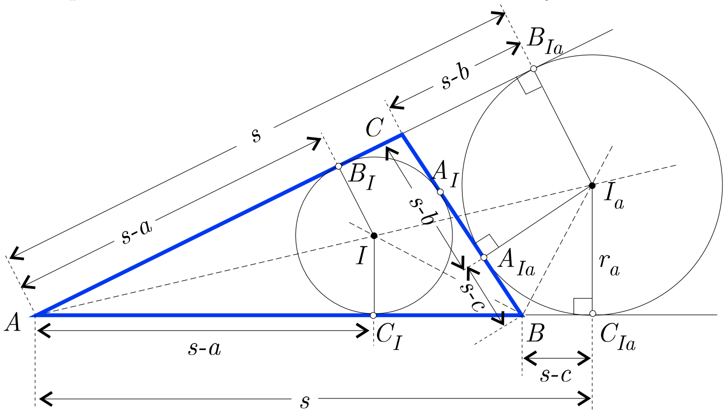
La intersección de esta hipérbola con la circunferencia de centro A y radio $2s$ nos da, en el primer cuadrante, un punto P. La perpendicular a AP en el punto donde ésta corta a la circunferencia de centro en A y radio h_a, nos permite determinar la hipotenusa del triángulo rectángulo que buscamos.

Aunque, en general los puntos comunes a una cónica y una circunferencia, no se pueden determinar con regla y compás, en este caso el punto P sí es constructible, pues corresponde a un valor de θ del que se conoce, por ejemplo, el $\cos\theta$, por las expresiones dadas arriba, que si son constructibles.

Esto problema de resolución de triángulos es un caso particular en que se dan A, h_a y $2s$.
(http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2086.pdf)

Otro método de construcción: Applet CabriJava

Hacemos uso de que el semiperímetro $s = p/2$ es la distancia del vértice A a los puntos de contacto C_{Ia} y B_{Ia} de la circunferencia exinscrita correspondiente al vértice A con los lados AB y AC.

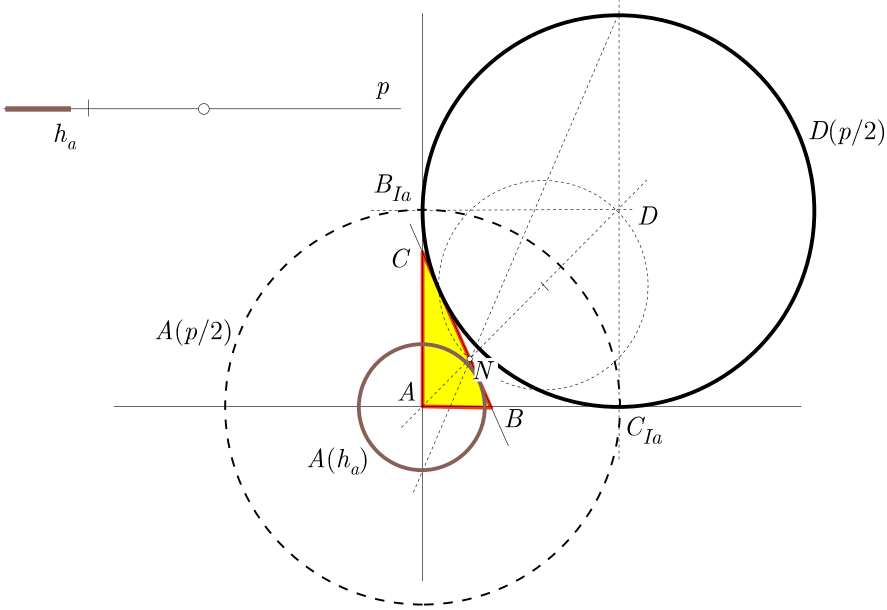


Los puntos de contacto de la circunferencia exinscrita $I_a(r_a)$ al triángulo $\widehat{ABC}$, relativa al vértice A, con los lados BC, CA y AB los denotamos por A_{Ia}, B_{Ia} y C_{Ia}, respectivamente. Entonces, se tienen las siguientes relaciones entre magnitudes de los segmentos:

$$AB_{Ia} = AC + CA_{Ia}, \qquad AC_{Ia} = AB + BA_{Ia}.$$

Sumando miembro a miembro, se tiene que $AB_{Ia} + AC_{Ia} = 2s$ y, como $AB_{Ia} = AC_{Ia}$, resulta que $AB_{Ia} = AC_{Ia} = s$, $BA_{Ia} = BC_{Ia} = s - c$ y $CA_{Ia} = CB_{Ia} = s - b$.

Sea A el vértice recto y sobre los catetos tomamos los puntos P y Q, tales $AC_{Ia} = AB_{Ia} = p/2$. Trazamos la circunferencia $D(p/2)$ tangente a los dos catetos en los puntos P y Q, y la circunferencia $A(h_a)$, de centro A y radio dado h_a, altura desde el vértice recto. Cualquiera de las tangentes comunes a estas circunferencias desde el centro de homotecia interno N, es la hipotenusa. Su intersección con los catetos nos da los otros dos vértices B y C.



Notas adicionales:

Las longitudes de los tres lados son

$$a = \frac{2S^2}{h_a + 2s}, \qquad b = \frac{2h_a s}{h_a + s + \sqrt{s^2 - 2sh_a + s^2 - h_a^2}}, \qquad c = \frac{2h_a s}{h_a + s - \sqrt{s^2 - 2sh_a + s^2 - h_a^2}}.$$

Conocidos los tres lados de un triángulo, sus demás elementos quedan ya determinados usando formulas conocidas, como por ejemplo para el área Δ o radios r y r_a: de la circunferencia inscrita y exinscrita, relativa al vértice A

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \qquad r_a = \frac{2\Delta}{b+c-a}.$$

No obstante, en el caso que nos ocupa al ser un triángulo rectángulo en el vértice A, los cálculos se podrían hacer de forma más directa, así:

$$\Delta = \frac{ah_a}{2} = \frac{h_a s^2}{h_a + 2s}, \qquad r = (s-a)\operatorname{tag} 45^{\mathrm{o}} = \frac{h_a s}{h_a + 2s}, \qquad r_a = s \operatorname{tag} 45^{\mathrm{o}} = s, \qquad \overline{II_a} = \frac{a}{\cos 45^{\mathrm{o}}} = \frac{2\sqrt{2}s^2}{h_a + 2s}.$$

Pues, de la relación (y otras análogas), $s = BA_I + A_I C + AC_I = a + AC_I$, se obtiene, para la circunferencia inscrita, que $AC_I = AB_I = s - a, BA_I = BC_I = s - b, CB_I = CA_I = s - c$.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2097.pdf