

Problema 466 de *triángulos cabri*. En un triángulo rectángulo se conocen el perímetro $2p$ y la altura h correspondiente al ángulo recto y se pide obtener en función de p y h :

1. Los tres lados del triángulo y su área.
2. Condición para que el problema sea posible.
3. Los radios del círculo inscrito y del círculo ex-inscrito correspondiente al ángulo recto.
4. La distancia entre los centros de ambos círculos.
5. Construcción geométrica del triángulo dados p y h . (Para ello conviene usar el círculo ex-inscrito indicado)

*Matemática Elemental (1933), Tomo II, N.1, Enero, p.14, N. 39.
Propuesto en la ETSI de Caminos(1931).*

Solución de Francisco Javier García Capitán

Supondremos en la resolución del problema que A es el ángulo recto, y por tanto que a es la hipotenusa y b y c son los catetos.

1. Los tres lados del triángulo y su área

Teniendo en cuenta las relaciones

$$\begin{cases} a + b + c = 2p \\ bc = ah, \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

obtenemos, por un lado que

$$a^2 = b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc = (2p - a)^2 - 2ah \Rightarrow a = \frac{2p^2}{2p + h},$$

y por otro que

$$b + c = 2p - a = 2p - \frac{2p^2}{2p + h} = \frac{2p^2 + 2ph}{2p + h} = \frac{2p(p + h)}{2p + h}$$

$$bc = ah = \frac{2p^2h}{2p + h},$$

por lo que b y c serán soluciones de la ecuación

$$(2p + h)x^2 - 2p(p + h)x + 2p^2h = 0,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 b, c &= \frac{p(p+h) \pm \sqrt{p^2(p+h)^2 - 2p^2h(2p+h)}}{2p+h} \\
 &= p \cdot \frac{p+h \pm \sqrt{p^2 + h^2 + 2ph - 4ph - 2h^2}}{2p+h} \\
 &= p \cdot \frac{p+h \pm \sqrt{p^2 - 2ph - h^2}}{2p+h}.
 \end{aligned}$$

El área del triángulo será

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{p^2h}{2p+h}.$$

2. Condición para que sea posible

Teniendo en cuenta el apartado anterior, debe ser

$$p^2 > 2ph + h^2 = (p+h)^2 - p^2 \Rightarrow 2p^2 > (p+h)^2,$$

es decir, debe ser $h < (\sqrt{2} - 1)p$.

3. Los radios del círculo inscrito y del círculo ex-inscrito correspondiente al ángulo recto.

El radio del círculo inscrito es

$$r = \frac{S}{p} = \frac{ph}{2p+h}.$$

Llamando I_a al centro del círculo ex-inscrito correspondiente al ángulo recto, y J_a la proyección de I_a sobre, por ejemplo, AB , resultará que el triángulo AJI_a es rectángulo isósceles, ya que $I_aAJ_a = 45^\circ$. Por tanto, tenemos que el radio del círculo ex-inscrito correspondiente al ángulo recto es

$$r_a = I_aJ_a = AJ_a = p.$$

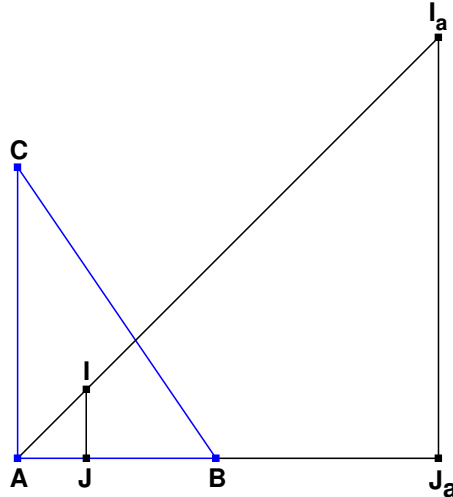


FIGURA 1

4. La distancia entre los centros de ambos círculos.

Usando de nuevo el triángulo isósceles AJ_aI_a , si llamamos J a la proyección ortogonal de I sobre AB , es claro que

$$II_a = \sqrt{2} \cdot J J_a = \sqrt{2} (A J_a - A J) = \sqrt{2} (r_a - r) = \sqrt{2} \left(p - \frac{ph}{2p+h} \right) = \frac{2\sqrt{2}p^2}{2p+h}.$$

5. Construcción geométrica del triángulo dados p y h .

En efecto, los cálculos realizados llevan a una construcción del triángulo. Dados, p y r con las condiciones del apartado 2,

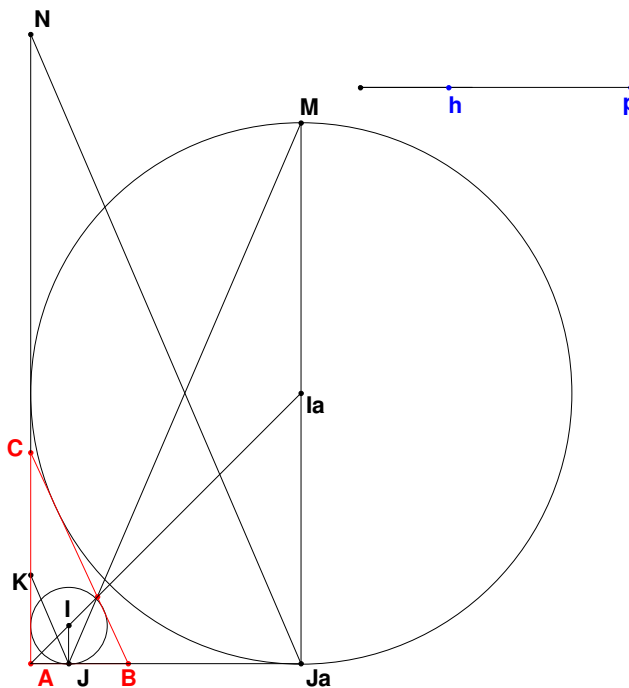


FIGURA 2

1. Construimos el triángulo rectángulo isósceles AJ_aI_a con $AJ_a = J_aI_a = p$.
2. Trazamos la circunferencia con centro I_a y radio I_aJ_a , que será la circunferencia exinscrita correspondiente a A de nuestro triángulo. Trazamos también el diámetro J_aM .
3. Sobre la perpendicular a AJ_a por A marcamos los puntos K y N tales que $AK = h$ y $JN = 2p$, con lo que tendremos $AN = 2p + h$.
4. La paralela por K a J_aN corta en J a AJ_a , y así tenemos $AJ = r$.
5. Trazamos la perpendicular por J a AJ_a , que corta en I a AI_a . Una vez hallado el incentro I , podemos trazar la circunferencia inscrita a ABC con centro I y radio IJ .

6. La hipotenusa de cada una de las dos soluciones estará sobre una tangente común a las circunferencias (I) e (I_a) . Para trazar estas tangentes comunes, hallamos el centro de homotecia de las dos circunferencias, que estará en la intersección de las rectas JM y AI_a .