

Problema 467 de triángulos cabri. Sea un triángulo ABC . Consideremos los volúmenes de revolución V_a, V_b, V_c obtenidos al hacer girar el triángulo alrededor de sus lados a, b, c respectivamente. Si $V_T = V_a + V_b + V_c$ demostrar o refutar si $V_T < 3V_E$, donde V_E es el volumen de la esfera cuyo radio es el mismo que el de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC .

Propuesto por Vicente Sánchez Vicario.

Solución de Francisco Javier García Capitán¹

Cuando los ángulos B y C son agudos el volumen V_a será el de la suma de dos conos con base h_a y alturas $b \cos C$ y $c \cos B$, y, teniendo en cuenta que el volumen de un cono con altura h y radio de la base r es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, tendremos

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h_a^2 (b \cos C + c \cos B) = \frac{1}{3}\pi a h_a^2.$$

Observamos que esta fórmula es igualmente válida para cuando alguno de los ángulos B o C es obtuso, ya que en ese caso habría que *restar* un cono de otro, y se corresponde con que uno de los cosenos es negativo.

Sumando, y teniendo en cuenta que

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a} \cdot \frac{abc}{4R} = \frac{bc}{2R},$$

tenemos

$$\begin{aligned} V_a + V_b + V_c &= \frac{1}{3}\pi a h_a^2 + \frac{1}{3}\pi b h_b^2 + \frac{1}{3}\pi c h_c^2 \\ &= \frac{\pi}{3} \left(a \frac{b^2 c^2}{4R^2} + b \frac{c^2 a^2}{4R^2} + c \frac{a^2 b^2}{4R^2} \right) \\ &= \frac{\pi abc}{12R^2} (bc + ca + ab). \end{aligned}$$

Y como $V_E = \frac{4}{3}\pi R^3$, lo que tenemos es que verificar si se cumple la desigualdad

$$\frac{\pi abc}{12R^2} (bc + ca + ab) < 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow abc(bc + ca + ab) < 48R^5.$$

¹En la resolución de este problema necesité cierta ayuda, así que pregunté en el foro *Art of Problem Solving*. Agradezco a Sergic Primazon, de San Petersburgo, su bonita respuesta, que es parte fundamental de esta solución, y animo a todos los lectores a visitar asiduamente este foro. Ver <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1131915>

En el caso del triángulo equilátero tenemos $a = b = c$ y $R = a/\sqrt{3}$, por lo que la desigualdad se convierte en

$$3a^5 < 48 \cdot \frac{a^5}{9\sqrt{3}} \Leftrightarrow 9\sqrt{3} < 16 \Leftrightarrow 243 < 256,$$

que es cierta.

El hecho de que para el triángulo equilátero se cumpla la igualdad

$$abc(bc + ca + ab) = 27\sqrt{3}R^5,$$

nos hace plantearnos la hipótesis de que siempre se cumpla la desigualdad

$$abc(bc + ca + ab) \leq 27\sqrt{3}R^5, \quad (1)$$

cumpléndose la igualdad si y solo si el triángulo es equilátero.

Para probar esta afirmación comenzamos por recordar algunas de las fórmulas del área S del triángulo:

$$S = sr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (2)$$

donde s es el semiperímetro y r es el radio de la circunferencia inscrita.

A partir de aquí hacemos

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{S^2}{s^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\ &= \frac{s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ca)s - abc}{s} \\ &= \frac{s^3 - (2s)s^2 + (ab+bc+ca)s - 4Rrs}{s} \\ &= -s^2 + (ab+bc+ca) - 4Rr, \end{aligned}$$

de donde

$$ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4Rr. \quad (3)$$

Ahora necesitamos algunas desigualdades. En primer lugar teniendo en cuenta el teorema de los senos, y también aplicando la concavidad (derivada segunda negativa) de la función seno en $[0, \pi]$,

$$\begin{aligned} \frac{s}{R} &= \frac{a+b+c}{2R} = \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C \\ &= 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{3} \\ &\leq 3 \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{A+B+C}{3} \right) = 3 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos la desigualdad

$$s \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R, \quad (4)$$

cumpléndose la igualdad si y solo si el triángulo es equilátero.

Por último, también usaremos la conocida desigualdad de Euler,

$$R \geq 2r, \quad (5)$$

cumpléndose también la igualdad si y solo si el triángulo es equilátero.

Ahora podemos demostrar la desigualdad (1), usando las igualdades de (2) y (3), y las desigualdades (4) y (5). En efecto,

$$\begin{aligned} abc \cdot (bc + ca + ab) &= 4Rrs \cdot (r^2 + s^2 + 4Rr) \\ &\leq 4R \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}R}{2} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{27R^2}{4} + 4R \cdot \frac{R}{2} \right) \\ &= 3\sqrt{3}R^3 \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{27R^2}{4} + 2R^2 \right) \\ &= 27\sqrt{3}R^5. \end{aligned}$$

Queda entonces probado que es cierta la desigualdad propuesta.