Problema 471 de *triánguloscabri*. *Sean ABC un triángulo e I su incentro. Construir la cónica que pasa por A, B y C siendo tangente en B y C a las bisectrices BI y CI. Demostrar que esta cónica es siempre una hipérbola. Demostrar que la polar trilineal de cualquier punto P sobre ella pasa por el excentro correspondiente a A, y que si XYZ es el triángulo ceviano de P entonces Y, Z e I siempre están alineados.*

1. Construir la cónica que pasa por A, B y C siendo tangente en B y C a las bisectrices BI y CI

Por construir una cónica entendemos hallar cinco puntos de la cónica. Una vez que tenemos cinco puntos ya podemos hallar tantos puntos de la cónica como deseemos. Y también podemos, con un programa como *Cabri*, trazar la cónica. Vamos a ver dos enfoques de esta cuestión, uno usando el teorema de Pascal, y otro usando una homografía entre haces de rectas.

1.1. Usando el teorema de Pascal

El teorema de Pascal afirma que si A, B, C, D, E, F son puntos que están sobre una cónica, los puntos de intersección $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$ y $Z = CD \cap FA$ están alineados.

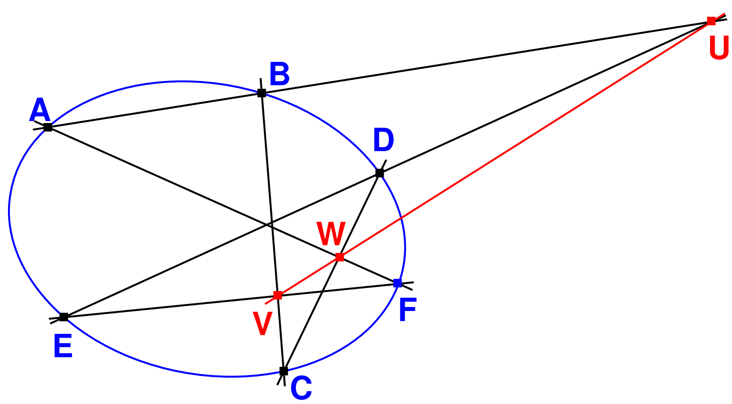

Figura 1

Es importante que el recíproco del teorema de Pascal también es cierto. Es decir, si A, B, C, D, E, F son puntos tales que los puntos de intersección $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$ y $Z = CD \cap FA$ están alineados, entonces los puntos A, B, C, D, E, F están sobre una misma cónica.

El recíproco del teorema de Pascal puede usarse para hallar puntos pertenecientes a una cónica de la que sólo conozcamos cinco puntos.

Dados los puntos A, B, C, D, E queremos construir un sexto punto F perteneciente a la misma cónica que los cinco primeros.

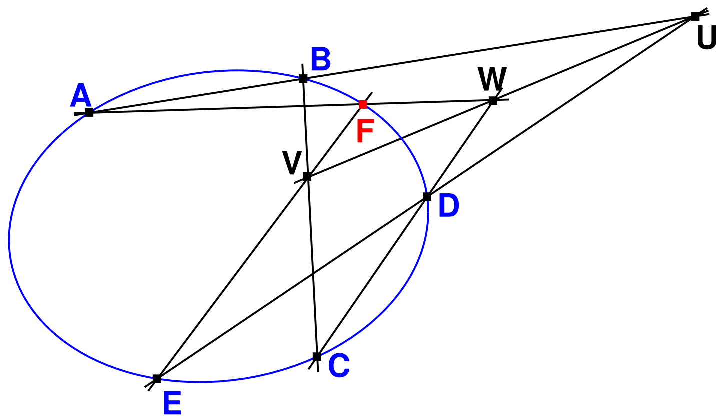

FIGURA 2

1. Hallamos $U = AB \cap DE$.

2. Elegimos un punto arbitrario V sobre BC.

3. Hallamos $W = UV \cap CD$.

4. Hallamos $F = AW \cap EY$.

Es evidente de la construcción realizada que los puntos $U = AB \cap DE$, $V = BC \cap EF$ y $W = CD \cap FA$ están alineados, entonces, por el recíproco del teorema de Pascal, los puntos A, B, C, D, E, F están sobre una cónica.

Como lo que nosotros tenemos es tres puntos A, B, C y las tangentes en B y en C, lo que podemos hacer es aplicar la construcción anterior a los puntos A, B, B, C, C, entendiendo que la recta BB es la recta tangente BI. De esta manera, obtenemos un punto más de la cónica.

La construcción de un punto F_1 este punto queda entonces de la siguiente manera:

1. Hallamos $U_1 = AB \cap CI$.

2. Elegimos un punto arbitrario V_1 sobre BI.

3. Hallamos $W_1 = U_1V_1 \cap BC$.

4. Hallamos $F_1 = AW_1 \cap CV_1$.

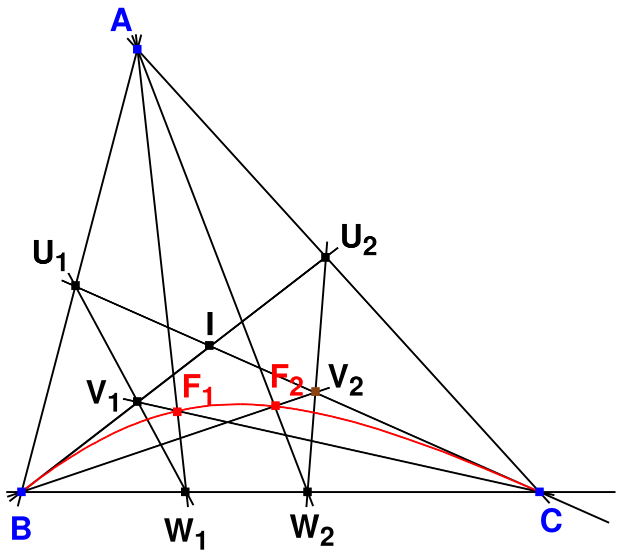

FIGURA 3

Intercambiando los papeles de B y C, es decir, considerando los puntos dados en el orden A, C, C, B, B, obtendremos otro punto F_2 sobre la cónica. También podemos obtenerlo de la misma construcción anterior al elegir otro punto V_1 en el paso 2. De cualquier forma ya podemos trazar la cónica por A, B, C, F_1 y F_2.

1.2. Usando una homografía entre haces de rectas

Usaremos los puntos de intersección de las rectas homólogas de dos haces homográficos es una cónica que pasa por los vértices de los dos haces.

Vamos a generar la cónica del enunciado como intersección de rectas homólogas por una homografía entre dos haces, con vértices B y C.

Para comenzar, consideremos dos puntos fijos E, F sobre los lados CA, AB del triángulo ABC y un punto arbitrario M sobre la recta EF. Sean M_b y M_c los puntos simétricos de M respecto de las rectas BE y CF, respectivamente. La aplicación $M_b \to M_c$ es una homografía entre las rectas simétricas de EF respecto de BE y CF respectivamente, lo cual define una homografía $BM_b \to CM_c$ entre los haces de rectas con vértices en B y C.

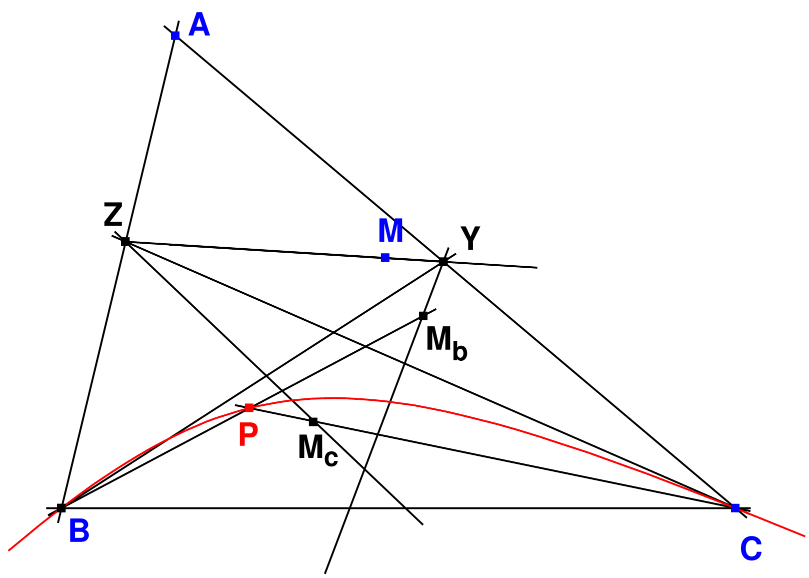

Figura 4

Entonces, según hemos dicho, al variar M sobre EF, el punto de intersección $P = BM_b \cap CM_c$ describe una cónica.

En el enunciado las rectas $BI = BE$ y $CI = CF$ son bisectrices interiores del triángulo ABC. Razonemos que en este caso, la cónica es tangente a BI y CI. En efecto, si hacemos $M = E$, tenemos $M_b = E$ y obtenemos el punto de la cónica $S = BE \cap CN_c$. Este punto coincidirá con B solo si M_c está sobre la recta BC, es decir si CF es una bisectriz del ángulo C, lo cual es cierto según la hipótesis.

Para terminar de demostrar que esta cónica es la del enunciado debemos comprobar que pasa por el punto A.

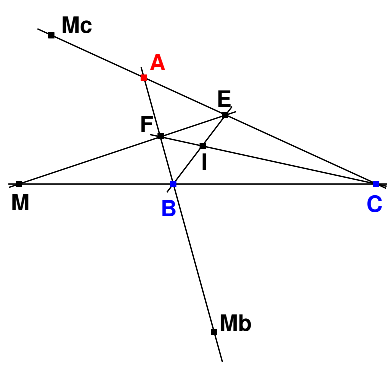

Figura 5

En efecto, si M es el punto de intersección de las rectas BC y EF, los puntos M_b y M_c están sobre las rectas AB y AC respectivamente. Por tanto, BM_b y CM_c se cortan en A, perteneciendo A a la cónica.

Ahora, una vez descrita la cónica de esta forma, como intersección de de rectas homólogas por una homografía entre dos haces, podemos calcular todos los puntos de la cónica que deseemos variando M sobre la recta EF.

2. Demostrar que esta cónica es siempre una hipérbola

2.1. En efecto, es una hipérbola

Para demostrar que la cónica es un hipérbola hallaremos dos puntos M sobre la recta EF tales que las correspondientes rectas homólogas BM_b y CM_c sean paralelas. Observemos que, al ser BI y CI las bisectrices interiores de ABC, las rectas BM_b y CM_c son rectas isogonales de BM y CM, y si queremos que la rectas BM_b y CM_c sean paralelas M deberá estar sobre la circunferencia circunscrita (ver apartado 5.2 de Paul Yiu: *Introduction to the Geometry of the Triangle*).

La figura siguiente muestra la rectas paralelas BMb y CMc para un punto de intersección M de la circunferencia circunscrita con la recta DE por los pies de las bisectrices BI y CI.

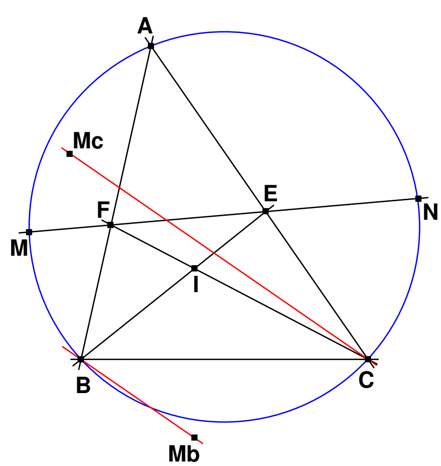

FIGURA 6

Los puntos de intersección M y N de la recta EF con la circunferencia circunscrita a ABC siempre serán distintos, por lo que las rectas BMb y BN_b

siempre serán distintas y los dos puntos del infinito de la cónica siempre serán distintos, por lo que se tratará siempre de una hipérbola.

2.2. Ecuación de la hipérbola en coordenadas baricéntricas

Según hemos visto, un punto P de nuestra cónica se obtiene siempre como intersección de dos rectas BM_b y CM_c isogonales de BM y CM, respectivamente, siendo M sobre la recta EF. En otras palabras, nuestra cónica es la transformación isogonal de la recta EF, y recíprocamente. Teniendo en cuenta que $I = (a : b : c)$, tenemos que $E = (a : 0 : c)$ y $F = (a : b : 0)$, por lo que la recta EF tiene ecuación $bcx - acy - abz = 0$. Entonces si $P = (x : y : z)$ está sobre la cónica, su transformado isogonal[1]

$$M = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right)$$

estará sobre la recta EF, lo que nos permite hallar la ecuación de la cónica:

$$bc\frac{a^2}{x} - ca\frac{b^2}{y} - ab\frac{c^2}{z} = 0 \Leftrightarrow ayz - bzx - cxy = 0.$$

3. La polar trilineal de cualquier punto P sobre ella pasa por el excentro correspondiente a A

3.1. Polar trilineal

Sean ABC es un triángulo y P un punto de su plano. Si las rectas AX, BY, CZ cortan a los lados BC, CA, AB en los puntos X, Y, Z, es decir, si XYZ es el triángulo ceviano de P respecto de ABC, entonces, por el teorema de Desargues, los puntos de intersección $X' = BC \cap YZ$, $Y' = CA \cap ZX$, $Z' = AB \cap XY$ están alineados. La recta que los contiene se llama *polar trilineal* del punto P respecto del triángulo ABC.

[1] Ver apartado 5.1 de Paul Yiu: *Introduction to the Geometry of the Triangle*.

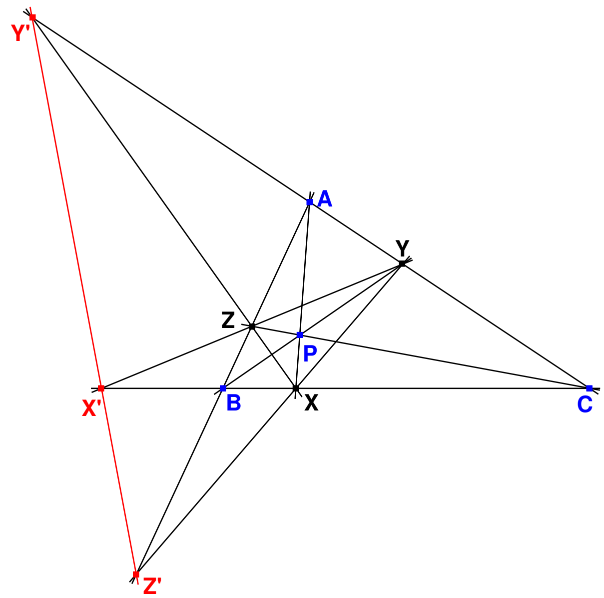

FIGURA 7

Si $P = (u : v : w)$, La ecuación de la polar trilineal de un punto cualquiera $P = (u : v : w)$ puede calcularse fácilmente, resultando:

$$vwx + wuy + uvz = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0.$$

3.2. La polar trilineal pasa por el excentro

Teniendo en cuenta la ecuación de la hipérbola que hemos calculado en el apartado anterior, podemos despejar $x = ayz/(bz + cy)$ y escribir cualquier punto de la misma en la forma $P = (avw : v(cv + bw) : w(cv + bw))$. Su polar trilineal es la recta

$$\frac{x}{avw} + \frac{y}{v(cv + bw)} + \frac{z}{w(cv + bw)} = 0.$$

Para que esta recta pase por el excentro $I_a = (-a : b : c)$ debe cumplirse que

$$-\frac{1}{vw} + \frac{b}{v(cv + bw)} + \frac{c}{w(cv + bw)} = 0,$$

lo cual es inmediato.

3.3. Triángulo ceviano de un punto de la hipérbola

Si XYZ es el triángulo ceviano de $P = (avw : v(cv + bw) : w(cv + bw))$, tendremos

$$Y = (avw : 0 : w(cv + bw)),$$
$$Z = (avw : v(cv + bw) : 0),$$

por lo que para que la recta YZ pase por el incentro I debe anularse el determinante

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ avw & 0 & w(cv+bw) \\ avw & v(cv+bw) & 0 \end{vmatrix} =& avw \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ v & 0 & cv+bw \\ w & cv+bw & 0 \end{vmatrix} \\ =& cv(cv+bw) + bw(cv+bw) - (cv+bw)^2 \\ =& 0.\end{aligned}$$