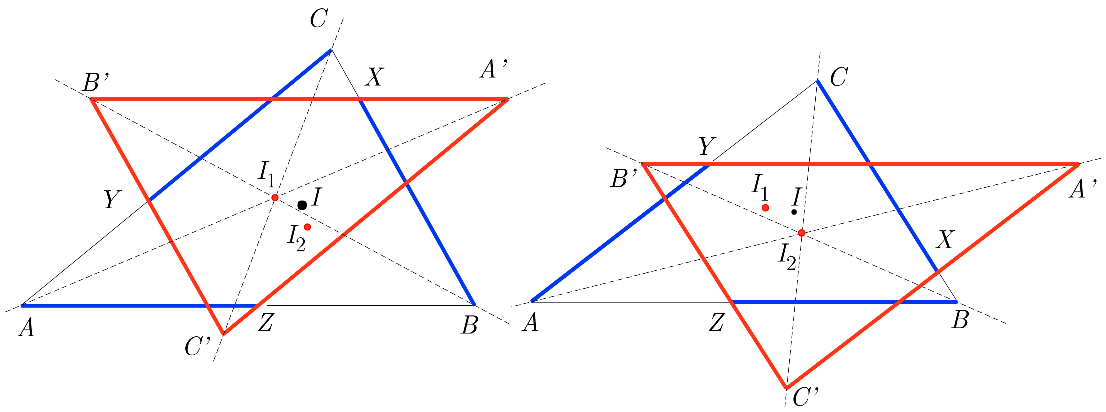
Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, encontrar las rectas DEF con D sobre la recta BC, E sobre la recta CA, y F sobre la recta AB tal que $BD = CE = AF$.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **473**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Propuesto por François Rideau, Maitre de Conférences à l'Université de Paris 7; con el siguiente enunciado:

Dado un triángulo equilátero ABC, encontrar la transversal < PQR > con P sobre la recta BC, Q sobre la recta CA, y R sobre la recta AB tal que BP=CQ=AR.

—— - ——



Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, recorriéndolo en el sentido contrario a las agujas de un reloj, tomamos segmentos iguales, de longitud t, sobre los lados a partir de sus vértices. Si designamos por X, Y y Z los extremos de estos segmentos en los lados opuestos a A, B y C, respectivamente, ellos tienen las siguientes coordenadas baricéntricas, relativas a $\widehat{ABC}$:

$$X(0 : a-t : t), \qquad Y(t : 0 : b-t), \qquad Z(c-t : t : 0).$$

El triangulo $\widehat{A'B'C'}$ (figura anterior izquierda) de lados paralelos a los de $\widehat{ABC}$ es homotético a éste y el centro de homotecia es uno de los puntos de Jerabek — ver Notas adicionales —.

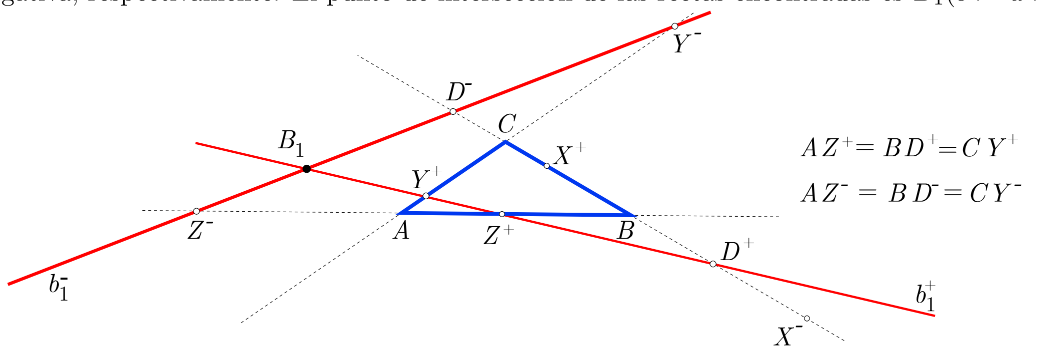
Tomemos los puntos $D(0 : a+t : -t)$, simétrico de X respecto a B, $E = Y$ y $F = Z$. Estos tres puntos están alineados, si sólo si

$$\begin{vmatrix} 0 & a+t & -t \\ t & 0 & b-t \\ c-t & t & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Es decir, si $t^3 - (b-t)(c-t)(a+t) = (b+c-a)t^2 + (ab+ac-bc)t - abc = 0$. Luego, para que estén alineados, la distancia t de cada uno al vértice correspondiente, ha de ser el valor absoluto de las siguientes raíces

$$\frac{bc-ca-ab \pm \sqrt{(bc-ca-ab)^2 + 4abc(b+c-a)}}{2(b+c-a)}.$$

La expresión bajo el radical es siempre positiva, por lo que existen dos raíces (una positiva y otra negativa) y hay dos rectas b_1^+ y b_1^- que satisface las condiciones del enunciado en este caso. En la figura siguiente se muestra la construcción exacta, en función de las longitudes de los lados del triángulo dibujado, de las rectas $D^+Y^+Z^+$ (D^+ el simétrico de X^+ respecto de B) y $D^-Y^-Z^-$ (D^- el simétrico de X^- respecto de B), para los casos en que la raíz de t positiva y negativa, respectivamente. El punto de intersección de las rectas encontradas es $B_1(c : -a : b)$.



Si ahora tomamos el simétrico $E(t:0:b-t)$ de Y respecto de C (en vez del simétrico de X respecto de B) en la construcción inicial, para que los puntos $D=X, E, F=Z$ estén alineados, t ha de ser solución del polinomio $(c+a-b)t^2+(bc+ba-ca)t-abc=0$, cuyas raíces son

$$\frac{ca-ab-bc \pm \sqrt{(ca-ab-bc)^2+4abc(c+a-b)}}{2(c+a-b)}.$$

Y de nuevo, obtenemos otras dos rectas c_1^+ y c_1^- cumpliéndose, en cada una de ellas, las condiciones impuestas. Se cortan en $C_1(c:a:-b)$.

Análogamente, se obtienen otras dos rectas a_1^+ y a_1^-, cuando tomamos los puntos $D=X, E=Y$ y $F(c+t:-t:0)$ el simétrico de Z respecto a A, y se exige que estén alineados. El punto de corte de tales rectas es $A_1(-c:a:b)$.

Si recorremos el triángulo $\widehat{ABC}$ en el sentido de las agujas del reloj y tomamos segmentos iguales, de longitud t, sobre los lados a partir de sus vértices, y si designamos por X, Y y Z (figura superior derecha) los extremos de estos segmentos en los lados opuestos a A, B y C, respectivamente, ellos tienen las siguientes coordenadas baricéntricas, relativas a $\widehat{ABC}$:

$$X(0:t:a-t), \qquad Y(b-t:0:t), \qquad Z(t:c-t:0).$$

Los puntos $D(0:-t:a+t)$ (simétrico de X respecto a C), $E=Y$ y $F=Z$ están alineados si t es solución del polinomio $(b+c-a)t^2+(ab+ac-bc)t-abc=0$, cuyas raíces son

$$\frac{-ab-ac+bc \pm \sqrt{(ab+ac-bc)^2+4abc(b+c-a)}}{2(b+c-a)}.$$

Lo que da lugar a dos rectas c_2^+ y c_2^- más, que verifican las exigencias del enunciado y que se cortan en $C_2(b:c:-a)$.

Estudio similar, nos lleva a encontrar dos pares de rectas más a_2^+, a_2^- y b_2^+, b_2^-, cuando se toman los simétricos $(b-t:0:t)$ y $(t:c-t:0)$ de Y y Z, respecto a A y B, respectivamente. Estos pares de rectas se cortan en los puntos $A_2(-b:c:a)$ y $B_2(b:-c:a)$.

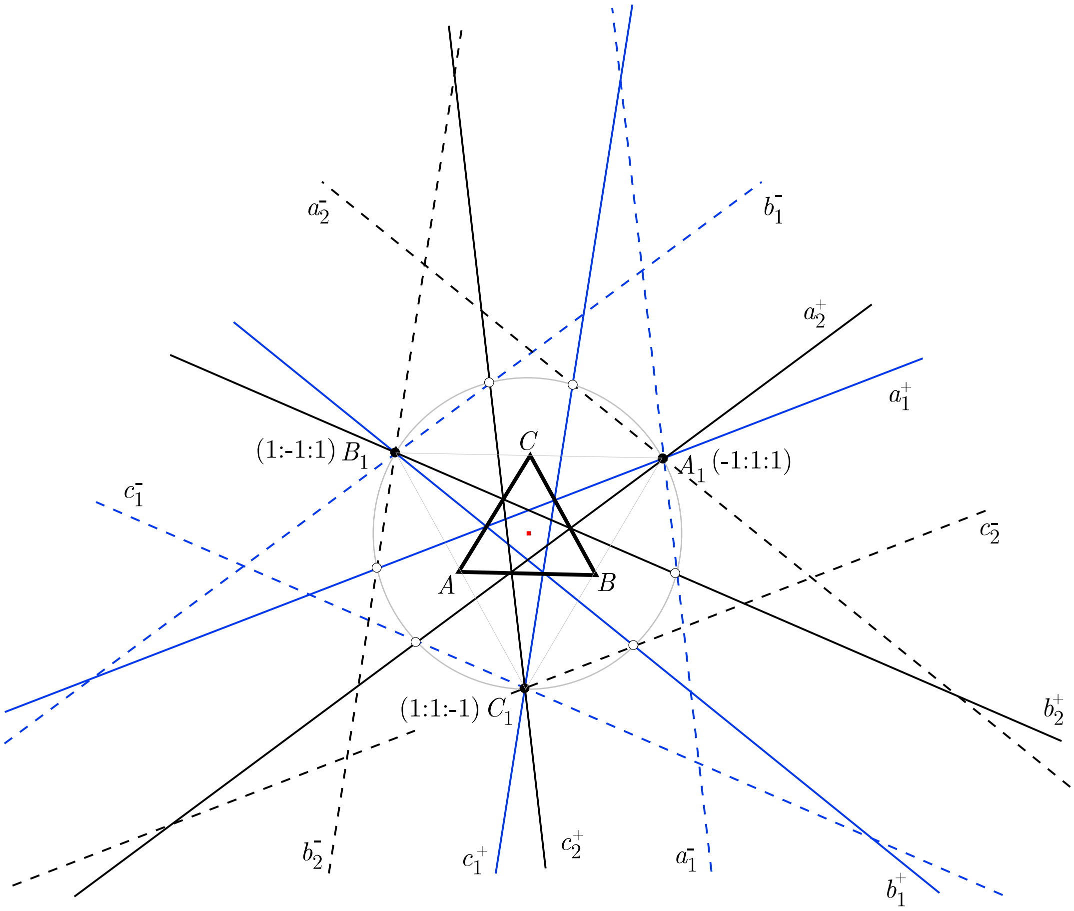
En resumen, existen DOCE RECTAS que cortan a los lados BC, CA y AB de $\widehat{ABC}$ en los puntos D, E y F, de tal forma que $BD=CE=AF$.

En particular, cuando $\widehat{ABC}$ es un TRIÁNGULO EQUILÁTERO ($a=b=c$), las raíces de los tres polinomios arriba considerados (en ambos casos de sentido de recorrido sobre los lados del triángulo) son

$$\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)a, \qquad -\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)a.$$

Las doce ecuaciones de las rectas son:

$$\begin{aligned}
a_1^+ &: \ \left(7-3\sqrt{5}\right)x+\left(3-\sqrt{5}\right)y+2\left(2-\sqrt{5}\right)z=0,\\
a_1^- &: \ \left(7+3\sqrt{5}\right)x+\left(3+\sqrt{5}\right)y+2\left(2+\sqrt{5}\right)z=0,\\
b_1^+ &: \ 2\left(2-\sqrt{5}\right)x+\left(7-3\sqrt{5}\right)y+\left(3-\sqrt{5}\right)z=0,\\
b_1^- &: \ 2\left(2+\sqrt{5}\right)x+\left(7+3\sqrt{5}\right)y+\left(3+\sqrt{5}\right)z=0,\\
c_1^+ &: \ \left(3+\sqrt{5}\right)x+2\left(2+\sqrt{5}\right)y+\left(7+3\sqrt{5}\right)z=0,\\
c_1^- &: \ \left(3-\sqrt{5}\right)x+2\left(2-\sqrt{5}\right)y+\left(7-3\sqrt{5}\right)z=0,\\
a_2^+ &: \ \left(7+3\sqrt{5}\right)x+2\left(2+\sqrt{5}\right)y+\left(3+\sqrt{5}\right)z=0,\\
a_2^- &: \ \left(7-3\sqrt{5}\right)x+2\left(2-\sqrt{5}\right)y+\left(3-\sqrt{5}\right)z=0,\\
b_2^+ &: \ \left(3-\sqrt{5}\right)x+\left(7-3\sqrt{5}\right)y+2\left(2-\sqrt{5}\right)z=0,\\
b_2^- &: \ \left(3+\sqrt{5}\right)x+\left(7+3\sqrt{5}\right)y+2\left(2+\sqrt{5}\right)z=0,\\
c_2^+ &: \ 2\left(2-\sqrt{5}\right)x+\left(3-\sqrt{5}\right)y+\left(7-3\sqrt{5}\right)z=0,\\
c_2^- &: \ 2\left(2+\sqrt{5}\right)x+\left(3+\sqrt{5}\right)y+\left(7+3\sqrt{5}\right)z=0.
\end{aligned}$$



Notas adicionales:

• Si en cada lado de un triángulo tomamos segmentos iguales y con la misma orientación, las paralelas a los lados por el extremo de estos segmentos determinan un triángulo homotético a $\widehat{ABC}$. El centro de homotecia es uno de los dos puntos de Jerabek del triángulo. El otro se obtiene cambiando la orientación.

Para el primer caso, que se muestra en la figura de la izquierda del principio, tenemos que:

$$X(0 : a-t : t), \qquad Y(t : 0 : b-t), \qquad Z(c-t : t : 0).$$

Y las paralelas a AB por X, a BC por Y y a CA por Z son, respectivamente:

$$-tx - ty + (a-t)z = 0, \qquad (b-t)x - ty - tz = 0, \qquad -tx + (c-t)y - tz = 0.$$

Estas rectas se cortan, dos a dos, en los puntos:

$$A'(ct + a(-c+t) : -at : -ct), \quad B'(-at : bt + a(-b+t) : -bt), \quad C'(-ct : -bt : ct + b(-c+t)).$$

Y los triángulos $\widehat{A'B'C'}$ y $\widehat{ABC}$ son perspectivos, con centro de perspectividad en $I_1(ac : ab : bc)$, punto de Jerabek [(1)], primer brocardiano [(2)]del incentro I, que es donde se cortan las rectas

$$AA' :\ cy - az = 0, \qquad BB' :\ bx - az = 0, \qquad CC' :\ bx - cy = 0.$$

Cambiando la orientación, se obtiene como centro de perspectividad el otro punto de Jerabek $I_2(ab : bc : ca)$.

• Con los puntos $A_1(-c : a : b)$, $B_1(c : -a, b)$, $C_1(c : a : -b)$, $A_2(-b : c : a)$, $B_2(b : -c : a)$ y $C_2(b : c : -a)$, obtenidos a lo largo de este desarrollo, se forman los triángulos $\widehat{A_1B_1C_1}$ y $\widehat{A_2B_2C_2}$ que son perspectivos con $\widehat{ABC}$, con centros de perspectividad los conjugados isotómicos de los puntos de Jerabek, esto es: $(c : a : b)$ y $(b : c : a)$.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2306.pdf

[(1)]Cúbica K324.- http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/Exemples/k324.html
Puntos de Jerabek.- http://garciacapitan.auna.com/problemas/jb/20061202/index.htm

[(2)]Dado un punto $P(u : v : w)$, triángulo $\widehat{ABC}$, los brocardianos de P son los puntos $P_1\left(\frac{1}{v} : \frac{1}{w} : \frac{1}{u}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{w} : \frac{1}{u} : \frac{1}{v}\right)$. Paul Yiu.- Introduction to Geometry of the Triangle. pag. 103. Disponible en http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps
Brocardianos.- http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/brocardi.pdf