Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y P un punto de su plano; llamamos A_P a la proyección ortogonal de P sobre BC, B_P a la proyección ortogonal de P sobre CA y C_P a la proyección ortogonal de P sobre AB. Sea $\mathcal{D}$ el lugar geométrico de los puntos P tales que las rectas AA_P, BB_P, CC_P son concurrentes; se pide:

1. Caracterizar el lugar $\mathcal{D}$ como una curva algebraica de orden n y determinar n.
2. Demostrar que el lugar $\mathcal{D}$ tiene al circuncentro O como centro de simetría.
3. Demostrar que los vértices del triángulo $\widehat{ABC}$ el incentro I, los ex-incentros I_a, I_b, I_c, el circuncentro O y el ortocentro H pertenecen al lugar $\mathcal{D}$.
4. Hallar una ecuación del lugar.
5. Demostrar que si P es un punto del lugar $\mathcal{D}$, entonces P^* el conjugado isogonal de P también es de la curva.
6. Demostrar que si P es un punto del lugar $\mathcal{D}$, todas las rectas PP^* pasan por un punto fijo que se determinará.
7. ¿Cómo cambia el lugar $\mathcal{D}$ en el caso de que $\widehat{ABC}$ sea un triángulo isósceles?

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **476**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Propuesta de José María Pedret, Ingeniero Naval. Esplugues de Llobregat (Barcelona); con el siguiente enunciado:

Dado un triángulo ABC y P un punto de su plano; llamamos A1 a la proyección ortogonal de P sobre BC, B1 a la proyección ortogonal de P sobre CA y C1 a la proyección ortogonal de P sobre AB. Sea Σ el lugar geométrico de los puntos P tales que las rectas AA1, BB1, CC1 son concurrentes; se pide:

1. Caracterizar el lugar Σ como una curva algebraica de orden n y determinar n.

2. Demostrar que el lugar Σ tiene al circuncentro O como centro de simetría.

3. Demostrar que los vértices del triángulo A, B, C, el incentro I, los ex-incentros Ia, Ib, Ic, el circuncentro O y el ortocentro H pertenecen al lugar Σ.

4. Hallar una ecuación del lugar.

5. Demostrar que si P es un punto del lugar Σ, entonces Pi el conjugado isogonal de P también es de la curva.

6. Demostrar que si P es un punto del lugar Σ, todas las rectas PPi pasan por un punto fijo que se determinará.

7. ¿Cómo cambia el lugar Σ en el caso de que ABC sea un triángulo isósceles?

—— - ——

Usaremos coordenadas baricéntricas referidas al triángulo $\widehat{ABC}$ y las notaciones:

$$S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}, \qquad S_B = \frac{a^2-b^2+c^2}{2}, \qquad S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Si $P(u:v:w)$ su triángulo pedal $A_P\widehat{B_P}C_P$ tiene por vértices (proyecciones ortogonales de P sobre los lados de $\widehat{ABC}$):

$$A_P(0 : a^2v + uS_C : a^2w + uS_B), \quad B_P(b^2u + vS_C : 0 : b^2w + vS_A), \quad C_P(c^2u + wS_B : c^2v + wS_A : 0).$$

Y las ecuaciones de las rectas AA_P, BB_P y CC_P son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
&(-a^2w - S_Bu)y + (a^2v + S_Cu)z = 0,\\
&(b^2w + S_Av)x + (-b^2u - S_Cv)z = 0,\\
&(-S_Aw - c^2v)x + (c^2u + S_Bw)y = 0.
\end{aligned}$$

Éstas concurren, en un punto Q, si el determinante formado por sus coeficientes se anula:

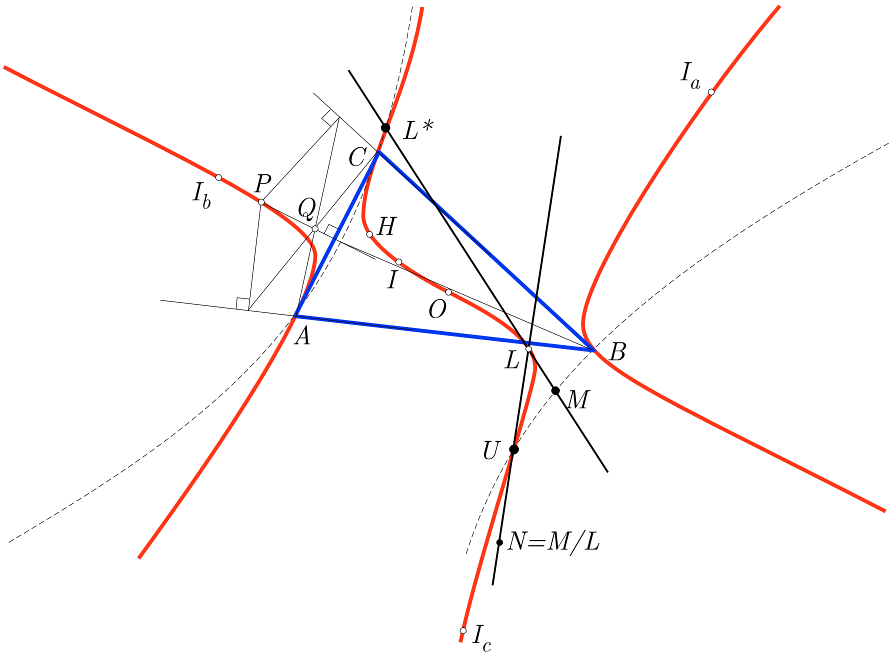
$$\begin{vmatrix} 0 & -a^2w - S_Buw & a^2v + S_Cu \\ b^2w + S_Av & 0 & -b^2u - S_Cv \\ -c^2v - S_Aw & c^2u + S_Bw & 0 \end{vmatrix} = 0$$

O sea (cambiando el nombre de las variables),

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{\substack{ABC\\abc\,xyz}} (S_AS_B - S_BS_C + S_AS_C)x(c^2y^2 - b^2z^2) = 0,$$

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{\substack{abc\\xyz}} (2a^2(b^2+c^2) + (b^2-c^2)^2 - 3a^4)x(c^2y^2 - b^2z^2) = 0.$$

Por tanto, P ha de estar en una cúbica[(1)] conocida como cúbica de Darboux (esto establece los apartados 1 y 4).



El conjugado isogonal de un punto $(x:y:z)$ es $(a^2/x : b^2/y : c^2/z)$. Al sustituir éste en la ecuación de la cúbica, resulta:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{\substack{ABC\\abc\,xyz}} (S_AS_B - S_BS_C + S_AS_C)\frac{a^2}{x}\left(c^2\frac{b^4}{y^2} - b^2\frac{c^4}{z^2}\right) =$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{x^2y^2z^2}\left(\mathop{\mathfrak{S}}_{\substack{ABC\\abc\,xyz}} (S_AS_B - S_BS_C + S_AS_C)x(b^2z^2 - c^2y^2)\right) = 0.$$

Así, la cúbica contiene al conjugado isogonal de cualquier punto que esté en ella (esto establece el apartado 5).

Apartado 3: Al sustituir las coordenadas de los puntos $I(a:b:c)$, $I_a(-a:b:c)$, $I_b(a:-b:c)$ y $I_c(a:b:-c)$ en la ecuación de la cúbica se deduce, sin dificultad, que éstos la satisfacen.

El circuncentro $O(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$ también está el la cúbica, ya que

$$a^2b^2c^2\Big((S_AS_B - S_BS_C + S_AS_C)S_A(S_B - S_C) + (S_BS_C - S_CS_A + S_BS_A)S_B(S_C - S_A) +$$

$$(S_CS_A - S_AS_B + S_CS_B)S_C(S_A - S_B)\Big) = 0.$$

Para establecer que el ortocentro $H(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$ está en la cúbica, podemos sustituir esta coordenadas en su ecuación y comprobar que la satisface o sólo basta tener presente que es el conjugado isogonal del circuncentro.

Apartado 6: La recta que pasa por un punto $P(u:v:w)$ y su conjugado isogonal $P^*(a^2/u : b^2/v : c^2/w)$, tiene por ecuación:

$$u\left(c^2v^2 - b^2w^2\right)x + v\left(a^2w^2 - c^2u^2\right)y + w\left(b^2u^2 - a^2v^2\right)z = \mathop{\mathfrak{S}}_{\substack{abc\\xyz\,uvw}} u(c^2v^2 - b^2w^2)x = 0.$$

Comparando esta ecuación con la de la cúbica, se sigue que el punto de coordenadas

[(1)] En la página web de "Cubics in the Triangle Plane" de Bernard Gibert puede encontrarse varias formas de obtener la Cúbica de Darboux, así como muchas propiedades: http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/Exemples/k004.html.

Un camino para su construcción puede encontrarse en J.-P. Ehrmann and B. Gibert, Special Isocubics in the Triangle Plane, pág 9, disponible en http://perso.orange.fr/bernard.gibert/:

Let X be the pivot and X^* its isogonal conjugate. Let M be a variable point on the line XX^*. Draw $N = M/X$ perspector of the cevian triangle of M and the anticevian triangle of X. The circum-conic through M and X^* intersects the line XN at two points U and U^* which are isogonal conjugate points on the cubic and harmonic conjugates with respect to X and N.

The Darboux cubic is the isogonal $p\mathcal{K}$ with pivot $X = L = X_{20}$.

$$L(S_AS_B - S_BS_C + S_CS_A : S_BS_C - S_CS_A + S_AS_B : S_CS_A - S_AS_B + S_BS_C)$$

está siempre en la recta PP^*, para cualquier P sobre la cúbica [(2)]. Se trata del punto de De Longchamps.

Apartado 2: El simétrico de un punto $P(u : v : w)$, respecto al circuncentro $(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, es el punto P' tal que $PP' : P'O = 2 : -1$; esto es

$$-(a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C)(u : v : w) + 2(u + v + w)(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C).$$

O bien,

$$P'\Big((a^2S_A - b^2S_B - c^2S_C)u + 2a^2S_A(v + w) : (-a^2S_A + b^2S_B - c^2S_C)v + 2b^2S_B(w + u) :$$

$$(-a^2S_A - b^2S_B + c^2S_C)w + 2c^2S_C(u + v)\Big).$$

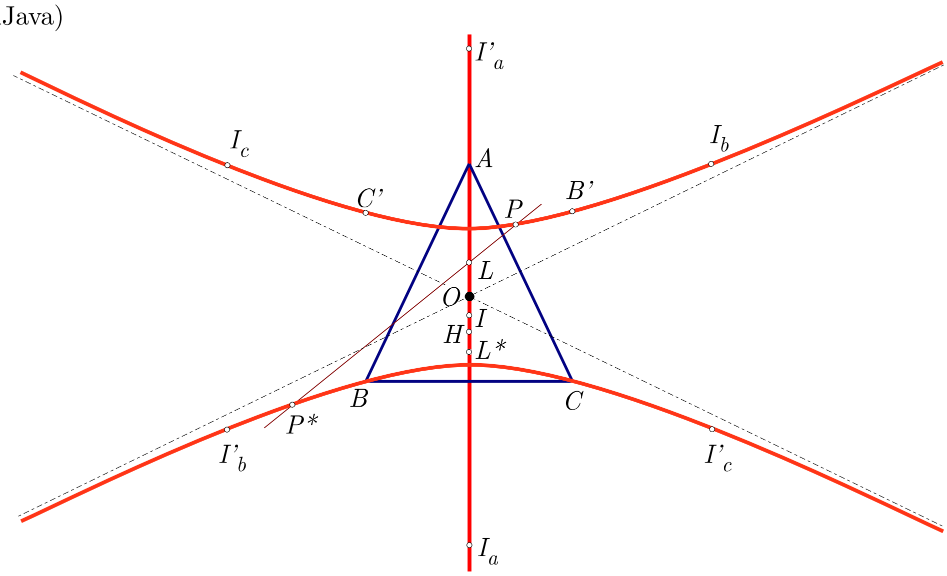
Estas coordenadas deben satisfacer a la ecuación de la cúbica (con Mathematica se comprueba que sí).

Apartado 7: En el caso de que el triángulo sea isósceles ($b = c$, por ejemplo), el lugar geométrico $\mathcal{D}$ es el producto de una recta (eje de simetría del triángulo) y una cónica:

$$(y - z)\left(a^2b^2x^2 + a^4yz + b^2(3a^2 - 4b^2)x(y + z)\right) = 0.$$

La cónica es una hipérbola (de centro en el circuncentro) y con puntos del infinito $(a^2 : -2b^2 : -a^2 + 2b^2)$ y $(a^2 : -a^2 + 2b^2 : -b^2)$.

(Applet CabriJava)



Siguiendo la construcción general de las asíntotas a una isocúbica (§1.4.4, pág. 10 en J.-P. Ehrmann and B. Gibert, Special Isocubics in the Triangle Plane, disponible en http://perso.orange.fr/bernard.gibert/, las asíntotas a esta hipérbola son las paralelas por O a las rectas LB' y LC' (donde B' y C' son los simétricos de B y C, respecto a O).

En este caso, el punto de De Longchamps tiene por coordenadas $(-3a^2 + 4b^2 : a^2 : a^2)$ y las del simétrioc de B, respecto de O, son $B'(-2a^2 + 4b^2 : a^2 - 2b^2 : 2b^2)$. Como la suma de las coordenadas de ambos puntos es la misma, $-a^2 + 4b^2$, el punto del infinito de la recta LB' tiene por coordenadas la diferencia de las de ambos: $(a^2 : -2b^2 : -a^2 + 2b^2)$.

Nota: Los puntos de concurrencia de las rectas AA_P, BB_P, CC_P, cuando P recorre la cúbica de Daboux, describen la cúbica de Lucas. Es decir, la cúbica de Darboux es el lugar geométrico de los puntos cuyo triángulo pedal es un triángulo ceviano y la cúbica de Lucas es el lugar geométrico de los puntos cuyo triángulo ceviano es un triángulo pedal. Para obtener la ecuación de esta última, consideramos las perpendiculares por los pies de las cevinas de un punto $P(u : v : w)$,

$$P_a(0 : v : w), \qquad P_b(u : 0 : w), \qquad P_c(u : v : w),$$

[(2)] De hecho, esta propiedad da otra caracterización de la cubica de Darboux, como el lugar geométrico de los puntos P que verifican que P, P^* y L están alineados.

que tienen por ecuaciones, respectivamente,

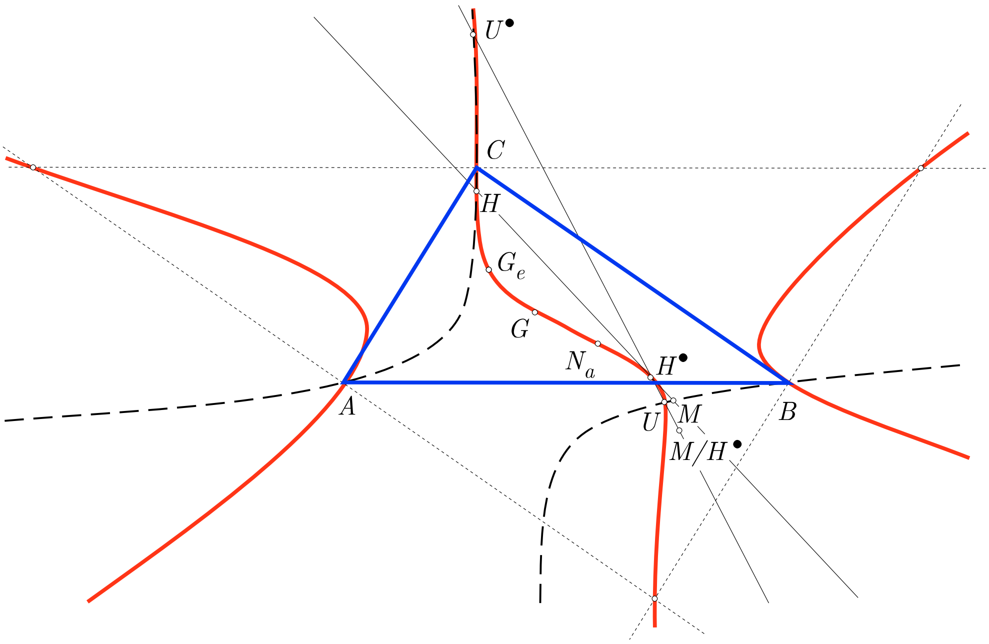
$$(S_B v - S_C w)x - a^2 wy + a^2 vz = 0, \quad b^2 wx + (-S_A u + S_C w)y - b^2 uz = 0, \quad -c^2 vx + c^2 uy + (S_A u - S_B v)z = 0.$$

Estas perpendiculares a los lados concurren si y sólo el determinante formado por sus coeficientes es nulo; es decir (cambiando las variables u, v, w por x, y, z):

$$(S_A S_B + S_A S_C + S_B S_C)(S_A x(y^2 - z^2) + S_B y(z^2 - x^2) + S_C z(x^2 - y^2)) = 0.$$

Luego la ecuación de la cúbica de Lucas [3] se puede poner de la forma:

$$(b^2 + c^2 - a^2)x(y^2 - z^2) + (a^2 - b^2 + c^2)y(z^2 - x^2) + (a^2 + b^2 - c^2)z(x^2 - y^2) = 0.$$



[3] Un camino para su construcción puede encontrarse en J.-P. Ehrmann and B. Gibert, Special Isocubics in the Triangle Plane, pág 9, disponible en http://perso.orange.fr/bernard.gibert/:

Let X be the pivot and X^* its isotomic conjugate. Let M be a variable point on the line XX^*. Draw $N = M/X$ perspector of the cevian triangle of M and the anticevian triangle of X. The circum-conic through M and X^* intersects the line XN at two points U and U^* which are isotomic conjugate points on the cubic and harmonic conjugates with respect to X and N.

The Lucas cubic is the isotomic $p\mathcal{K}$ with pivot $X = X_{69}$ (isotomic conjugate of H).