Sean un triángulo $\widehat{ABC}$, $\widehat{M_aM_bM_c}$ su triángulo medial y $\widehat{M'_aM'_bM'_c}$ el triángulo medial de éste. Si G es el baricentro de $\widehat{ABC}$, consideremos la homología h_A de centro en A, eje la paralela por G a BC y tal que M_a es el homólogo de M'_a. Análogamente se definen, cíclicamente, las homologías h_B y h_C.

Tomemos un punto arbitrario X en el plano y definimos los puntos $U = h_A(X)$, $Y = h_B(U)$, $Z = h_C(U)$, X' el punto de intersección de la recta GX con la paralela por U a BC, Y' el punto de intersección de la recta GY con la paralela por U a CA y Z' el punto de intersección de la recta GZ con la paralela por U a AB.

Establecer que los siete puntos U, X, Y, Z, X', Y' y Z' están en una misma cónica Γ_a.

Demostrar que para cualquier triángulo $\widehat{A'B'C'}$ tal que A' divide BC en la misma proporción que B' a CA y C' a AB, es perspectivo con $\widehat{X'Y'Z'}$ y su centro de perspectividad está en en la cónica Γ_a.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **480**

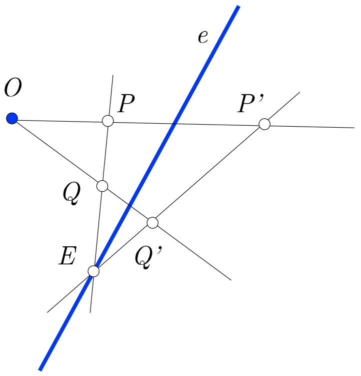
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

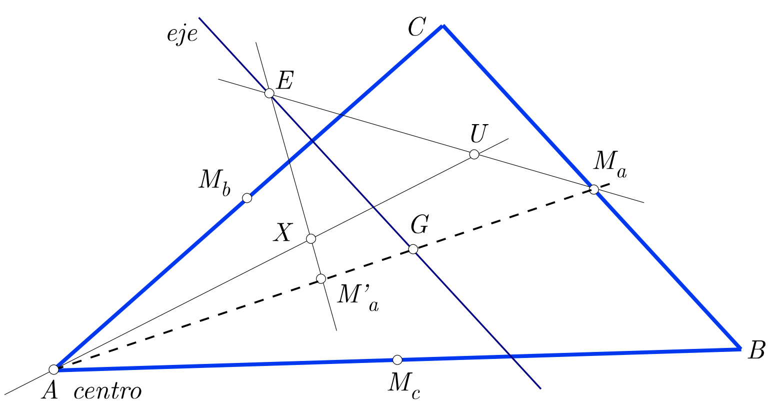
Adaptación de una propuesta de Francois Rideau, como homenaje a Steve Sigur[(1)].

—— - ——

Utilizaremos coordenadas baricéntricas respecto al triángulo dado $\widehat{ABC}$ (no necesariamente equilátero).

Para determinar el homólogo Q' de un punto Q, mediante una homología de centro en un punto O, eje e y de la que se conocen dos puntos homólogos P y P', trazamos la recta PQ que corta el eje en E; la recta EP' corta a OQ en punto buscado Q'.





En nuestro caso, la homología h_A, tiene centro en $A(1:0:0)$, su eje, que es la paralela por $G(1:1:1)$ a la recta $BC:\ x=0$, tiene por ecuación $2x-y-z=0$, y el punto medio de BC, $M_a(0:1:1)$, es homólogo de $M'_a(2:1:1)$, punto medio de M_bM_c.

Tomemos un punto arbitrario $P(u:v:w)$, que denotamos ahora por $X=P$; para determinar las coordenadas del homólogo U de $X(u:v:w)$, obtenemos el punto de intersección del eje con la recta $M'_aX:\ (-v+w)x+(u-2w)y+(-u+2v)z=0$, que es $E(2(u-v-w):2u-3v-w:2u-v-3w)$. Finalmente, el punto $U(-u+v+w:v:w)$, se obtiene como intersección de las rectas

$$AX:\ wy-vz=0, \qquad EM_a:\ (v-w)x+(u-v-w)y+(-u+v+w)z=0.$$

Siguiendo el mismo proceso se obtienen las coordenadas de $Y=h_B(U)$ y $Z=h_C(U)$:

$$Y(-u+v+w:-u+2w:w), \qquad Z(-u+v+w:v:-u+2v).$$

Las rectas GX y la paralela por U a BC tienen por ecuaciones, respectivamente,

$$GX:\ (-v+w)x+(u-w)y+(-u+v)z=0, \qquad (v+w)x+(u-v-w)y+(u-v-w)z,$$

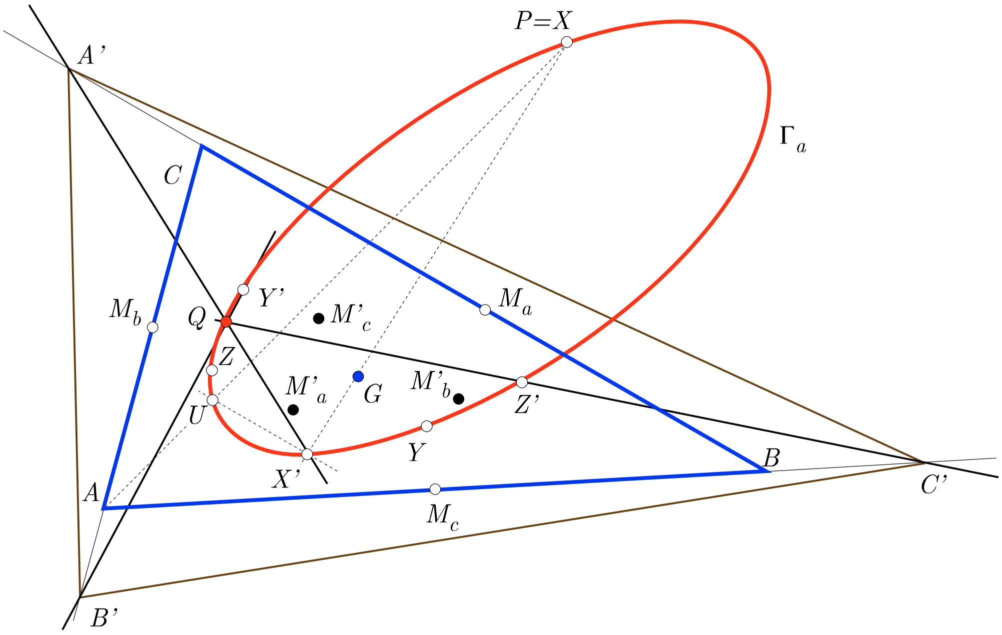
las cuales se cortan en X' cuyas coordenadas y, similarmente, las de los puntos Y' y Z' son:

$$X'(-u+v+w:w:v), \qquad Y'(w:v:-u+v+w), \qquad Z'(v:-u+v+w:w).$$

Los siete puntos U, X, Y, Z, X', Y', Z' están en la cónica Γ de ecuación:

$$vwx^2-w(u-v-w)y^2-v(u-v-w)z^2-(u-v-w)^2yz-v^2zx-w^2xy=0.$$

[(1)]Steve Sigur (1946-2008), su página web: http://www.paideiaschool.org/TeacherPages/Steve_Sigur/geometryIndex.htm



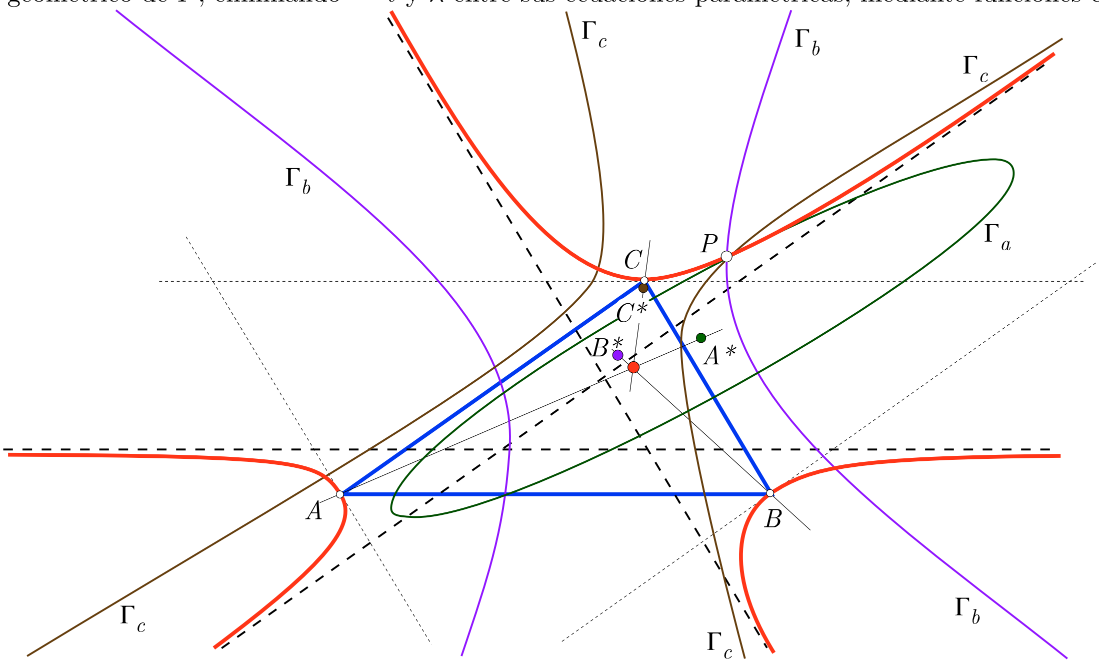
El triángulo $\widehat{A'B'C'}$ con vértices en $A'(0:1-t:t)$, $B'(t:0:1-t)$ y $C'(1-t:t:0)$ es perspectivo con $\widehat{X'Y'Z'}$, pues las rectas

$$A'X':\ ((-1+t)v+tw)x+t(u-v-w)y+(-1+t)(u-v-w)z=0,$$
$$B'Y':\ (-1+t)vx+(t(u-v-2w)+w)y+tvz=0,$$
$$C'Z':\ twx+(-1+t)wy+((-1+t)u+v-2tv+w-tw)z=0,$$

concurren en el punto de coordenadas

$$Q\Big((u-v-w)\left(-w+t(-u+v+3w)+t^2(u-2(v+w))\right):$$
$$v\left(-u+v+w+t(2u-3v-2w)+t^2(-u+2(v+w))\right):w\left(v-t(2v+w)-t^2(u-2(v+w))\right)\Big).$$

Este punto satisface a la ecuación de la cónica Γ_a, para cualquier t. A la ecuación de ésta, también, se puede llegar, como lugar geométrico de P, eliminando [2] t y λ entre sus ecuaciones paramétricas, mediante funciones cuadráticas:



$$x=\lambda(u-v-w)\left(-w+t(-u+v+3w)+t^2(u-2(v+w))\right)$$
$$y=\lambda v\left(-u+v+w+t(2u-3v-2w)+t^2(-u+2(v+w))\right)$$
$$z=\lambda w\left(v-t(2v+w)-t^2(u-2(v+w))\right).$$

[2] Clark Kimberling.- Conics Associated with a Cevian Nest, Forum Geometricorum, 1 (2001) 141 – 150.
Párrafo §10.4 "Conics parametrized by quadratic functions" en Paul Yiu.- Introduction to Geometry of the Triangle. pág 117, que está disponible en http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps

Observaciones adicionales:

El centro de la cónica Γ_a es el punto

$$A^*\big((u-v-w)(uv+uw+2vw-u^2):v(uv+2uw-4vw-2w^2):w(uw+2uv-4vw-2v^2)\big).$$

En el desarrollo expuesto hemos tomado un punto arbitrario $P(u:v:w)$ y comenzábamos con la homología h_A, para determinar los puntos que estaban contenidos en la cónica Γ_a. Si ahora partimos de la homología h_B y ponemos $Y=P(u:v:w)$, $V=H_b(Y)$, $Z=h_C(V)$, $X=h_A(V)$ y los puntos X',Y',Z' son obtenidos siguiendo la misma construcción que antes, todos estos puntos están en una cónica Γ_b, cuyo centro es el punto

$$B^*\big((v-w-u)(vw+vu+2wu-v^2):w(vw+2vu-4wu-2u^2):u(vu+2vw-4wu-2w^2)\big).$$

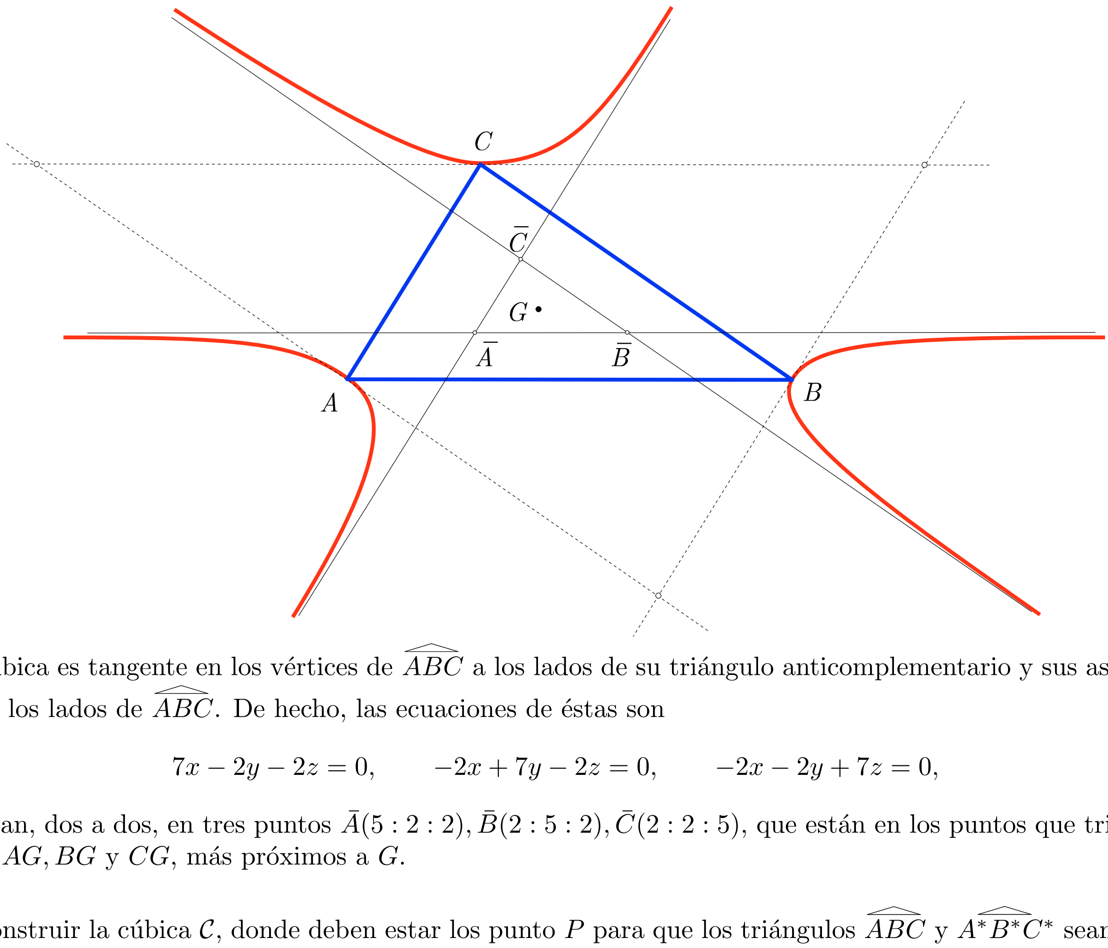
Similarmente, partiendo de la homología h_C se llega a otra cónica Γ_c, con centro en

$$C^*\big((w-u-v)(wu+wv+2uv-w^2):u(wu+2wv-4uv-2v^2):v(wv+2wu-4uv-2u^2)\big).$$

Para que el triángulo $\widehat{ABC}$ y el $\widehat{A^*B^*C^*}$, formado por los centros de las tres cónicas, sean perspectivos, el punto $(u:v:w)$ ha de satisfacer a:

$$6xyz(x-y)(x-z)(y-z)\left(x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)-\frac{3}{2}xyz\right)=0.$$

Es decir, debe estar sobre los lados o medianas de $\widehat{ABC}$ o en la isocúbica [(3)] $\mathcal{C}$ no pivotal de polo y raíz $G(1:1:1)$ y parámetro $k=-3/2$ (cúbica circunscrita a $\widehat{ABC}$ y tal que si un punto está en ella, también está su conjugado isotómico).



Esta cúbica es tangente en los vértices de $\widehat{ABC}$ a los lados de su triángulo anticomplementario y sus asíntotas son paralelas a los lados de $\widehat{ABC}$. De hecho, las ecuaciones de éstas son

$$7x-2y-2z=0, \qquad -2x+7y-2z=0, \qquad -2x-2y+7z=0,$$

que se cortan, dos a dos, en tres puntos $\bar{A}(5:2:2), \bar{B}(2:5:2), \bar{C}(2:2:5)$, que están en los puntos que trisecan a los segmentos AG, BG y CG, más próximos a G.

Para construir la cúbica $\mathcal{C}$, donde deben estar los punto P para que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A^*B^*C^*}$ sean perspectivos, necesitamos seis puntos más que estén en la cúbica; para localizarlos utilizamos las indicaciones dadas por Martin Acosta (en comunicación personal) basadas en técnicas de geometría dinámica que él denomina "detección de puntos" y "puntos nodales" en su trabajo "*Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología*", Educación Matemática, vol. 17 num. 3 diciembre de 2005, pp. 121-140. Disponible en http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/405/40517307.pdf.

(3) J.-P. Ehrmann and B. Gibert, Special Isocubics in the Triangle Plane, pág 7, disponible en http://perso.orange.fr/bernard.gibert/

Utilizando la técnica de "detección de puntos", el lugar de P que hace que el centro B^* de la cónica Γ_b esté en la recta BC está compuesto de la recta BC y la hipérbola que pasa por $A(1:0:0), B(0:1:0), M_a(0:1:1), M'_b(1:2:1)$ y por el simétrico $(1:0:-2)$ de A respecto de C; es decir, el lugar de los puntos que anulan la primera componente de B^*:

$$x\left(-xy+4xz-2yz+2z^2\right)=0.$$

Similarmente, el lugar de P que hace que el centro C^* de la cónica Γ_c esté en la recta BC está compuesto de la recta BC y la hipérbola que pasa por $A(1:0:0), C(0:0:1), M_a(0:1:1), M'_c(1:1:2)$ y por el simétrico $(1:-2:0)$ de A respecto de B; es decir, el lugar de los puntos que anulan la primera componente de C^*:

$$x\left(4xy+2y^2-xz-2yz\right)=0.$$

La intersección de estas dos hipérbolas da dos "puntos nodales" que están sobre la cúbica.

De hecho estos dos puntos son también la intersección de cualquiera de estas hipérbolas con el lado $5x+2y+2z=0$ del triángulo homotético a $\widehat{ABC}$, en la homotecia de centro G y razón 3. Sus coordenadas son

$$A_1\left(4:-5+\sqrt{15}:-5-\sqrt{15}\right),\qquad A_2\left(4:-5-\sqrt{15}:-5+\sqrt{15}\right).$$

Procediendo de forma similar y cíclicamente, se obtiene que los lugares geométricos que describe P para que C^* y A^* estén simultáneamente sobre CA están compuestos por la recta CA y las hipérbolas

$$-2x^2-4xy+2xz+yz=0,\qquad -2z^2+2xz-4yz+xy=0,$$

que contienen, la primera, a B, C, M_b, M'_c y al simétrico $(-2:1:0)$ de B respecto de A, y la segunda, a B, A, M_b, M'_a y al simétrico $(0:1:-2)$ de B respecto a C. Estas dos hipérbolas se cortan en los puntos de la cúbica:

$$B_1\left(-5-\sqrt{15}:4:-5+\sqrt{15}\right),\qquad B_2\left(-5+\sqrt{15}:4:-5-\sqrt{15}\right).$$

Finalmente, para que A^* y B^* estén simultáneamente en BA, el punto P describe el lugar geométrico formado por la recta BA y las hipérbolas:

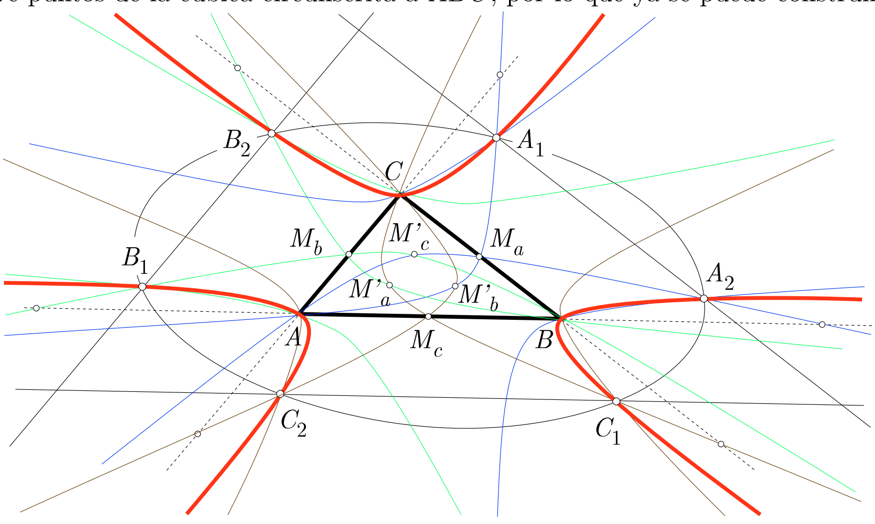
$$-2y^2+2xy-4zy+xz=0,\qquad -2x^2+2yx-4zx+yz=0.$$

La primera contiene a los puntos C, A, M_c, M'_a y el simétrico $(0:-2:1)$ de C respecto de B; y la segunda a C, B, M_c, M'_b y al simétrico $(-2:0:1)$ de C respecto de A.

Estas hipérbolas se cortan en los puntos de la cúbica:

$$C_1\left(-5+\sqrt{15}:-5-\sqrt{15}:4\right),\qquad C_2\left(-5-\sqrt{15}:-5+\sqrt{15}:4\right).$$

Tenemos así, nueve puntos de la cúbica circunscrita a $\widehat{ABC}$, por lo que ya se puede construir [4].



(4)Roger Cuppens.-Gométrie supérieure en jouant avec cabri-géomètre II. T.2; Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) Paris, 1999.

Los seis "punto nodales", $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$, situados sobre la cúbica, obtenidos arriba, están sobre una elipse de centro en el baricentro G de $\widehat{ABC}$, de ecuación

$$5(x^2 + y^2 + z^2) + 16(xy + xz + yz) = 0.$$

Cuando el punto P se mueve sobre los lados o medianas de $\widehat{ABC}$, el centro de perspectividad de $\widehat{ABC}$ y $A^*\widehat{B^*}C^*$ está en la misma recta donde se mueve P.

Y cuando P se mueve en la cúbica $\mathcal{C}$, ¿dónde está el centro de perspectividad de tales triángulos?

Martín Acosta, utilizando la técnica de "detección de puntos", encuentra que, en este caso, los centros de perspectividad están en la cúbica $\overline{\mathcal{C}}$ homotética a $\mathcal{C}$, en la homotecia de centro G y razón $1/3$; por lo que su ecuación debe ser

$$44(x^3 + y^3 + z^3) - 84(xy^2 + xz^2 + yz^2 + yx^2 + zx^2 + zy^2) + 345xyz = 0.$$

Esta cúbica está circunscrita al triángulo $\widehat{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ formado por las asíntotas de $\mathcal{C}$. Sus asíntotas son las rectas paralelas a los lados

$$-19x + 8y + 8z = 0, \qquad 8x - 19y + 8z = 0, \qquad 8x + 8y - 19z = 0.$$

La ecuación de esta cúbica, referida a $\widehat{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ es:

$$\bar{x}(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) + \bar{y}(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) + \bar{z}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - \frac{3}{2}\bar{x}\bar{y}\bar{z} = 0.$$

Se trata de la isocúbica no pivotal de polo y raíz G y parámetro $k = 3/2$, relativa al triángulo $\widehat{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$. Su construcción, por tanto, es análoga a la de la cúbica $\mathcal{C}$. Los "puntos nodales", situados sobre los lados de $\widehat{ABC}$, son ahora:

$$\begin{array}{ll}
\bar{A}_1\left(0 : 16 - 3\sqrt{15} : 11\right), & \bar{A}_2\left(0 : 16 + 3\sqrt{15} : 11\right), \\
\bar{B}_1\left(11 : 0 : 16 - 3\sqrt{15}\right), & \bar{B}_2\left(11 : 0 : 16 + 3\sqrt{15}\right), \\
\bar{C}_1\left(16 - 3\sqrt{15} : 11 : 0\right), & \bar{C}_2\left(16 + 3\sqrt{15} : 11 : 0\right).
\end{array}$$

La elipse que los contiene es

$$11(x^2 + y^2 + z^2) - 32(xy + xz + yz) = 0.$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2308.pdf