El problema de Castillon y su resolución por conjugación

José María Pedret - Ingeniero Naval
Esplugues de Llobregat (Barcelona)

curso 2008-2009

CONTENIDO

0. INTRODUCCIÓN

0.1 EL PROBLEMA

Inscribir un triángulo en una cónica dada de tal modo que sus lados pasen respectivamente por tres puntos dados.

0.2 EL DOCUMENTO

La intención del trabajo, plasmado en este documento, es deducir un método de resolución del problema de Castillon por medio de la conjugación y ofrecer una demostración que compruebe y justifique el método.

Conocí este método leyendo un artículo magnífico que **FRANÇOIS RIDEAU** publicó en los números 54 y 55 de la revista **QUADRATURE, LE PROBLÈME DE CASTILLON**. Precisamente en el número 55 de Enero-Marzo de 2005 aparecía la parte titulada: **UNE NOUVELLE CONSTRUCTION PROJECTIVE BASÉE SUR LA CONJUGAISON.**

Una figura fruto de las explicaciones de **Monsieur RIDEAU** aparece en:

http://www.cabri.net/castillon/

La demostración proyectiva del método por medio de homografías (involuciones), que realiza **FRANÇOIS RIDEAU** en su artículo, es inédita, brillante y original.

No puedo decir, en cambio, que la demostración aquí presentada sea estrictamente original. Me he inspirado en:
R. LACHLAN, AN ELEMENTARY TREATISE ON MODERN PURE GEOMETRY, MACMILLAN AND CO., LONDON & N.Y. 1893, §271, EX. 6

Deducimos el método de resolución por conjugación para una cónica en general. Nuestro trabajo intenta usar herramientas geométricas que no necesiten profundizar en la geometría proyectiva. No obstante, de entre las características de la cónica, la que más nos conviene nos lleva a definir una proyección y a usar la razón doble.

La deducción de este método de resolución del **Problema de Castillon** recurre primeramente al análisis de la figura cuando se supone el problema resuelto.

Este análisis nos obliga a conocer los conceptos de razón doble, cuaterna armónica, haz armónico, cuadrivértice, involución, recta polar, polo, punto conjugado, ... Incluimos las definiciones y demostramos los teoremas necesarios para llegar a los teoremas básicos en los que se apoya la deducción del método y su comprobación posterior.

Concluimos con una revisión gráfica del número de soluciones del problema y se observa que el método no da solución si los tres puntos dados están alineados. Damos además un método alternativo específico para esta excepción que se indica en **M. CHASLES, TRAITÉ DES SECTIONS CONIQUES, GAUTHIER-VILLARS, PARIS 1865, §21**; como corolario al teorema de Desargues para el cuadrivértice inscrito en una cónica.

José María Pedret. Ingeniero Naval. Esplugues de Llobregat (Barcelona).

1. SERIES DE PUNTOS Y HACES DE RECTAS

1.1 DEFINICIÓN DE SERIE DE PUNTOS
Cuando varios puntos A, B, C, ... están sobre una misma recta reciben el nombre de **colineales** o **alineados**; y se dice que dichos puntos forman una **serie de puntos**. Se suele escribir como [A, B, C, ...].

La serie de tres puntos recibe el nombre de **terna** y la de cuatro puntos recibe el nombre de **cuaterna**.

1.2 SEGMENTOS ORIENTADOS
Dados dos puntos A y B sobre una recta, la longitud del segmento entre A y B puede considerarse en dos sentidos, desde A hacia B y en sentido contrario desde B hacia A.

Cuando el segmento y su longitud se miden desde A hacia B se representan por AB, y cuando se mide desde B hacia A, se representan por BA.

A B

En consecuencia, las dos expresiones AB y BA representan la misma magnitud medida en sentidos contrarios y por tanto les asignamos signos

$$BA = -AB \quad \Rightarrow \quad AB + BA = 0 .$$

1.3 TEOREMA SOBRE RELACIONES ENTRE SEGMENTOS DE UNA SERIE DE PUNTOS
Si A, B, C son tres puntos alineados, los segmentos BC, CA, AB verifican la siguiente relación

$$AB + BC + CA = 0 .$$

A B C

Suponemos que B está entre A y C. Entonces AB, BC, AC tienen el mismo sentido y por tanto el mismo signo, y $AC = AB + BC$. Así por [1.2]

$$AB + BC - AC = 0 \quad \Rightarrow \quad AB + BC + CA = 0 .$$

1.4 LA RAZÓN SIMPLE Y UNICIDAD DEL TERCER PUNTO
Dada una terna A, B, C, sabemos que forman hasta tres segmentos. La relación

$$(ABC) = \frac{AB}{AC}$$

entre dos de esos segmentos recibe el nombre de **razón simple** de los tres puntos (en ese orden). Observemos que si $(ABC) > 0$, B y C están en el mismo lado de A y si $(ABC) < 0$, están en lados distintos).

El tercer punto, que forma con otros dos una razón simple dada, es único. Supongamos otro tercer punto A'

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B}{A'C} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'A + AB}{A'A + AC} \Rightarrow AB \cdot A'A + AB \cdot AC - AC \cdot A'A - AC \cdot AB = 0 \Rightarrow (AB - AC) \cdot A'A = 0 \Rightarrow A'A = 0 \Rightarrow A' = A$$

Supongamos otro punto B' $\quad \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB'}{AC} \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB + BB'}{AC} \Rightarrow BB' = 0 \Rightarrow B' = B$

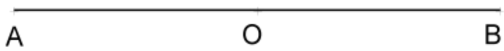
De forma análoga, si suponemos un tercer punto C', obtenemos $C' = C$.

1.5 TEOREMA SOBRE RELACIONES ENTRE RAZONES SIMPLES
Si dos ternas A, B, C y D, E, F tienen la misma razón simple, se cumple que

$$(ABC) = (DEF) \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB \pm DE}{AC \pm DF} = \frac{AC \cdot (ABC) \pm DF \cdot (DEF)}{AC \pm DF} = \frac{AC \pm DF}{AC \pm DF} \cdot (ABC) = (ABC) .$$

1.6 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Punto medio de un segmento es aquel que equidista de los extremos de dicho segmento



Si O es ese punto, entonces $AO = OB \quad \Rightarrow \quad OB = -OA$

Si calculamos la razón simple $(AOB) = \dfrac{AO}{AB} = \dfrac{AO}{AO + OB} = \dfrac{AO}{2 \cdot AO} = \dfrac{1}{2}$.

Si tomamos un punto arbitrario P en la misma recta y aplicamos la relación [1.3]

$$\begin{aligned} & PA = PO + OA \\ PB = PO + OB \quad \Rightarrow \quad & PB = PO - OA \end{aligned}$$

sumando los resultados $PA + PB = 2 \cdot PO \quad \Rightarrow \quad PO = \dfrac{PA + PB}{2}$.

1.7 DEFINICIÓN DE HAZ DE RECTAS

Cuando varias rectas OA, OB, OC, ... de un mismo plano concurren en un mismo punto O, se dice que las rectas forman un **haz de rectas**. El punto O recibe el nombre de **centro** o **vértice del haz**. Y las rectas del haz son también los **rayos** del haz.

Se suele escribir O[A, B, C, ...] o [OA, OB, OC,...].

2. LA RAZÓN DOBLE

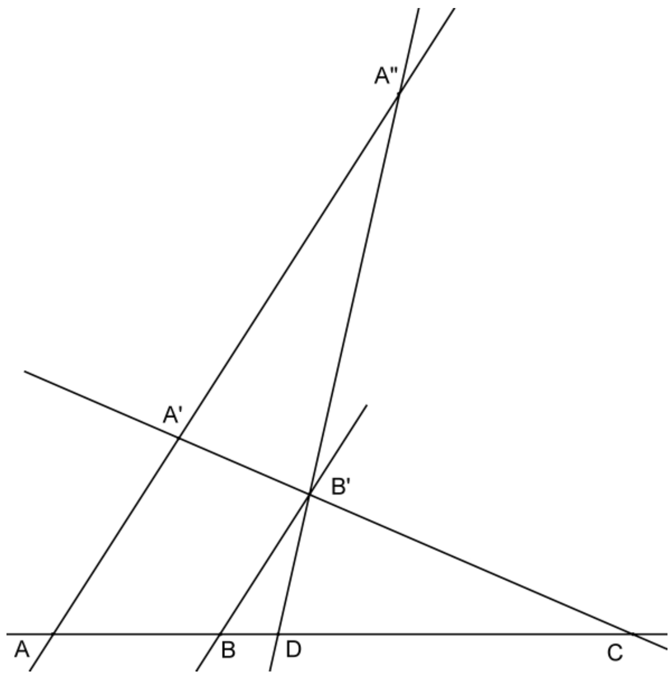
2.1 DEFINICIÓN DE RAZÓN DOBLE DE CUATRO PUNTOS

Dados cuatro puntos A, B, C, D en una misma recta, sabemos que forman hasta seis segmentos. La relación

$$(ABCD) = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

entre cuatro de esos segmentos recibe el nombre de **razón doble** de los cuatro puntos (en ese orden).

2.2 CONSTRUCCIÓN DEL CUARTO PUNTO PARA UNA RAZÓN DOBLE DADA Y SU UNICIDAD



Dada la razón doble k de cuatro puntos, de los que se conocen tres A, C, D, para determinar el cuarto punto B, trazamos una recta cualquiera por A, sobre esa recta trazamos A' y A" con la condición de que la razón simple de (AA'A") sea k. CA' y DA" se cortan en B'. Por B' una paralela a AA' corta a ACD en el punto B.

ACA' y BCB' son triángulos semejantes $\qquad \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AA'}{BB'}$

ADA" y BDB' son triángulos semejantes $\qquad \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AA''}{BB'}$

dividiendo miembro a miembro estos resultados

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AA'}{BB'} : \frac{AA''}{BB'} = \frac{AA'}{AA''} \cdot \frac{BB'}{BB'} = k$$

B es el punto buscado y como vemos, es único. Si suponemos que existe otro punto B_1, que forme con A, C, D la misma razón doble que forman con B

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{B_1C} : \frac{AD}{B_1D} \quad \Rightarrow \quad \frac{BC}{BD} = \frac{B_1C}{B_1D} \quad \Rightarrow \quad (BCD) = (B_1CD)$$

y como el tercer punto de una razón simple es único [1.4] $B_1 = B$.

2.3 TEOREMA SOBRE RELACIONES ENTRE RAZONES DOBLES

$$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA)\ .$$

Por medio de la definición [2.1] y de [1.2]

$$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{BD}{BC}:\frac{AD}{AC}=\frac{CA}{CB}:\frac{DA}{DB}=\frac{DB}{DA}:\frac{CB}{CA}$$

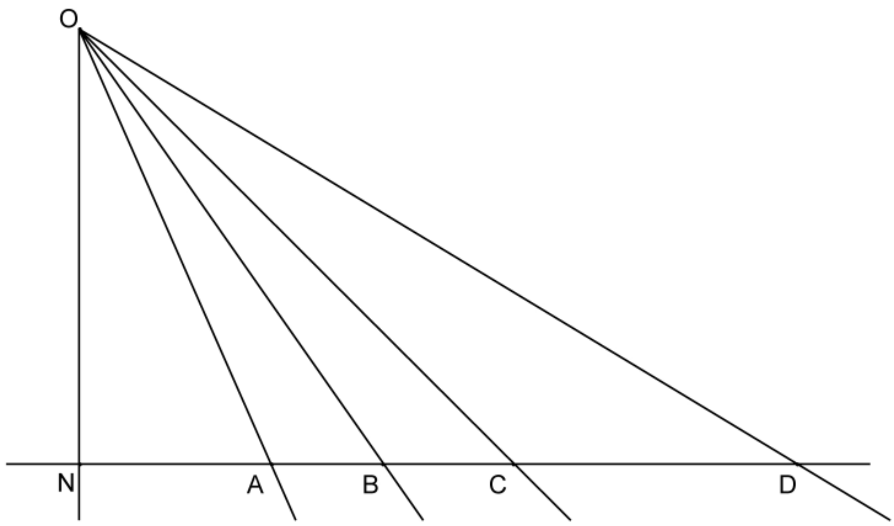
2.4 EXPRESIÓN DE LA RAZÓN DOBLE Y EL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO
Retomamos la definición [2.1] de la razón doble de cuatro puntos alineados A, B, C, D; y consideramos la condición de O como punto medio de C y D; usamos las relaciones de [1.3] y [1.6] y obtenemos

$$\left.\begin{array}{r}(ABCD)=\dfrac{AC}{AD}:\dfrac{BC}{BD}\\ OD=-OC\end{array}\right\}\Rightarrow (ABCD)=\frac{AO+OC}{AO+OD}:\frac{BO+OC}{BO+OD}=\frac{AO+OC}{AO-OC}:\frac{BO+OC}{BO-OC}=\frac{AO-OD}{AO+OD}:\frac{BO-OD}{BO+OD}\ .$$

2.5 DEFINICIÓN DE RAZÓN DOBLE DE UN HAZ DE CUATRO RECTAS
Dado el haz de cuatro rectas OA, OB, OC, OD definimos su razón doble como

$$O(ABCD)=\frac{\text{sen}AOC}{\text{sen}AOD}:\frac{\text{sen}BOC}{\text{sen}BOD}\ .$$

2.6 TEOREMA SOBRE LA IGUALDAD DE LA RAZÓN DOBLE ENTRE PUNTOS Y RECTAS
Si por cuatro puntos en línea recta se trazan rectas concurrentes en un mismo punto, la razón doble de las cuatro rectas del haz [1.7] es igual a la razón doble de los cuatro puntos.



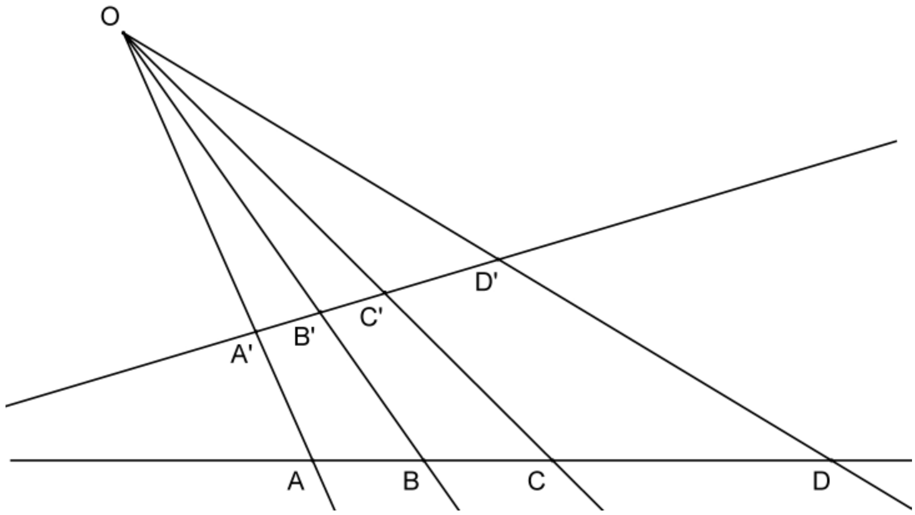
Si N es el punto de intersección de la recta AD y una perpendicular a la misma desde el punto de concurrencia O, con las diversas expresiones del área de los triángulos formados, obtenemos

$$ON\cdot AC=OA\cdot AC\cdot \text{sen}AOC \quad\Rightarrow\quad \text{sen}AOC=\frac{ON\cdot AC}{OA\cdot AC}$$

y expresiones análogas para los otros segmentos.

$$(OA,OB,OC,OD)=\frac{\text{sen}AOC}{\text{sen}AOD}:\frac{\text{sen}BOC}{\text{sen}BOD}=\frac{\dfrac{ON\cdot AC}{OA\cdot OC}}{\dfrac{ON\cdot AD}{OA\cdot OD}}:\frac{\dfrac{ON\cdot BC}{OB\cdot OC}}{\dfrac{ON\cdot BD}{OB\cdot OD}}=\frac{\dfrac{AC}{OC}}{\dfrac{AD}{OD}}:\frac{\dfrac{BC}{OC}}{\dfrac{BD}{OD}}=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=(A,B,C,D)$$

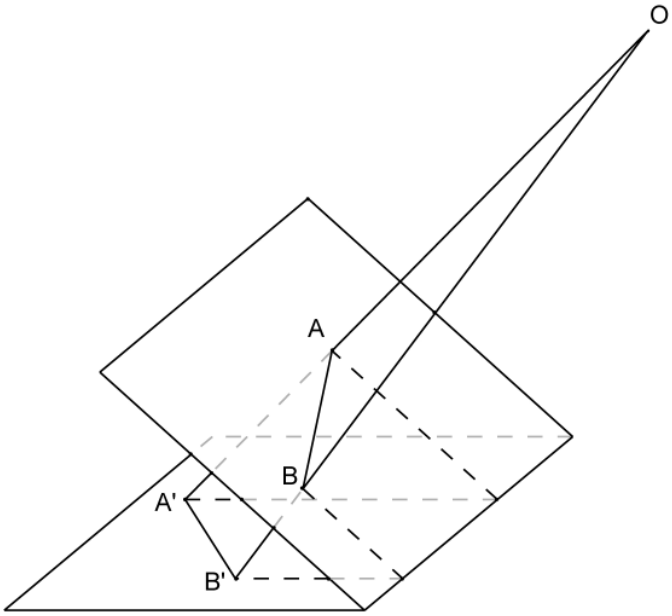
2.7 COROLARIO AL TEOREMA [2.6]
Si dos rectas cualesquiera cortan un haz de cuatro rectas OA, OB, OC, OD respectivamente en los puntos A, B, C, D y A', B', C', D'; la razón doble de A, B, C, D es igual a la razón doble de A', B', C', D'.



Directamente de [2.6]

$$(A,B,C,D)=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{\text{senAOC}}{\text{senAOD}}:\frac{\text{senBOC}}{\text{senBOD}}=\frac{A'C'}{A'D'}:\frac{B'C'}{B'D'}=(A',B',C',D').$$

2.8 DEFINICIÓN DE PROYECCIÓN



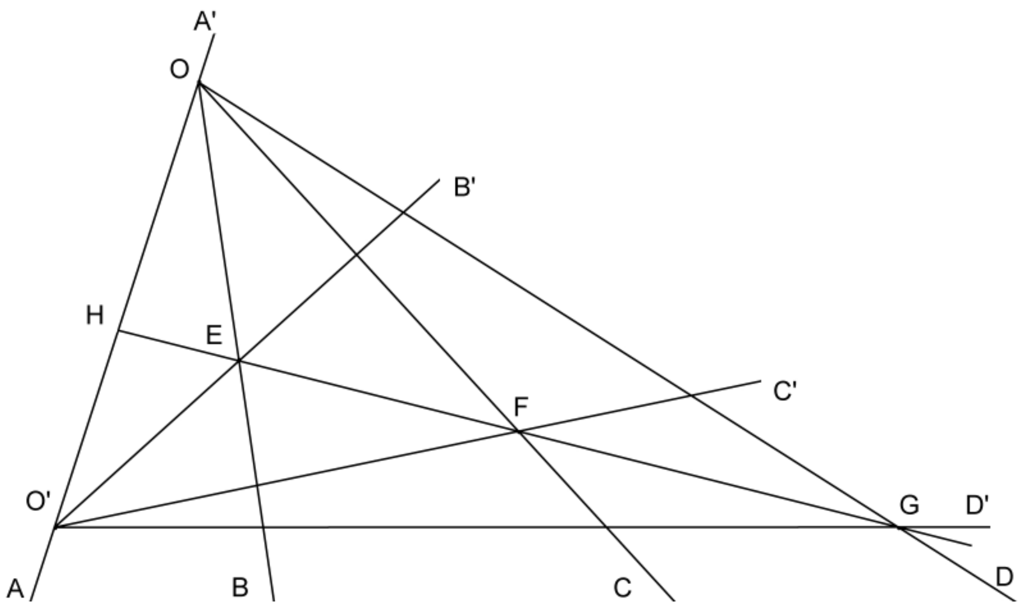
Sean α y α' dos plano cualesquiera. Sea O un punto fuera de esos dos planos y sea A un punto del plano α. Trazamos la recta OA que corta al plano α' en el punto A'. El punto A' es la **proyección** desde O del punto A en el plano α'.

También se dice que A' es la **perspectiva** de A en el plano α'. El punto O es el **centro de perspectiva** o **centro de proyección**. La recta OA recibe el nombre de **rayo** de proyección.

2.9 REESCRITURA DEL COROLARIO [2.7]
Si a cuatro puntos alineados, se les proyecta (se les hace la perspectiva) sobre un plano, los cuatro puntos que constituyen la proyección (en perspectiva) tienen la misma razón doble que los puntos proyectados.

O también, cuando se proyectan cuatro puntos en línea recta su razón doble se mantiene fija.

2.10 TEOREMA SOBRE PUNTOS ALINEADOS EN HACES DE RECTAS CON UNA RECTA COMÚN
Cuando dos haces de cuatro rectas [OA, OB, OC, OD] y [O'A', O'B', O'C', O'D'] tienen igual razón doble y una recta común OAO'A', los tres puntos de intersección E, F, G de las otras rectas están en línea recta.



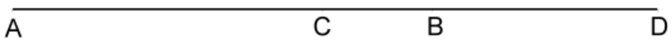
Sean H, G', G los puntos de intersección de la recta EF con OO', OD, O'D'; por la igualdad de razones dobles y con el corolario [2.7] tenemos

$$\left.\begin{array}{r}(OA,OB,OC,OD)=(HEFG)\\(OA',OB',OC',OD')=(HEFG')\end{array}\right\} \Rightarrow \quad (HEFG)=(HEFG')\ ;$$

pero por [2.2] los puntos G y G'son únicos y por lo tanto coinciden; en consecuencia, los tres puntos E, F, y G están alineados.

3. LA DIVISIÓN ARMÓNICA

3.1 DEFINICIÓN DE PUNTO CONJUGADO ARMÓNICO



Dados cuatro puntos A, B, C, D, en una misma recta, el segmento AB se dice **dividido armónicamente** por C y D si

$$AC : CB = AD : BD \, .$$

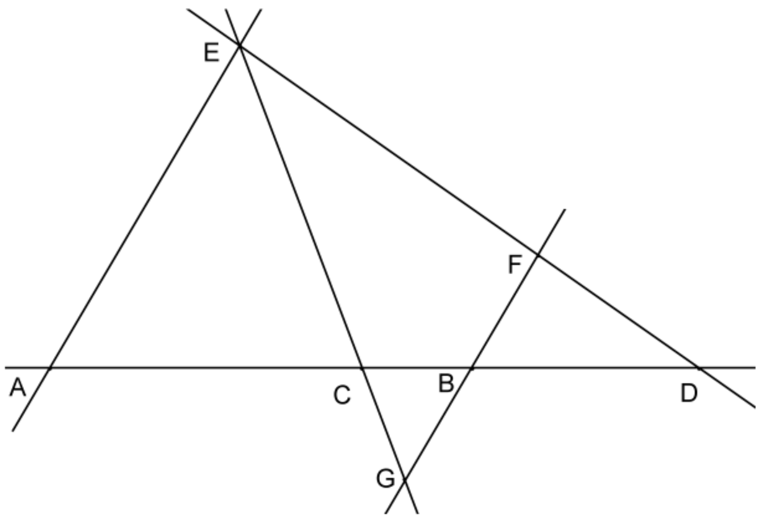
Los puntos C y D reciben el nombre de puntos **conjugados armónicos** respecto a los puntos A y B; en este caso decimos que los puntos A y B están **armónicamente separados** por C y D.

Además $$AC : CB = AD : BD \quad \Rightarrow \quad CB : BD = AC : AD \, ;$$

por lo que A y B son conjugados armónicos respecto a C y D.

[ABCD] recibe el nombre de **cuaterna armónica** y se escribe [AB,CD]; los pares A, B y C, D son los pares **conjugados** de la cuaterna.

3.2 CONSTRUCCIÓN DEL PUNTO CONJUGADO ARMÓNICO Y SU UNICIDAD



Sean tres puntos arbitrarios y alineados A, B, C. Para hallar el conjugado armónico de C respecto a los puntos A y B, dibujamos por A y B rectas paralelas AE y BF. Por C trazamos una recta arbitraria ECG que corta a AE en E y a BF en G. Sobre BF tomamos el punto F, tal que B sea el punto medio de GF, EF corta a AB en D, que es el punto requerido.

Con los triángulos semejantes de la figura

$$AC : CB = AE : GB = AE : BF = AD : BD \, .$$

Y por tanto [3.1], [A,B,C,D] es una cuaterna armónica que se suele escribir como [AB,CD].

Esta construcción no es más que un caso particular de la construcción [2.2] con k=-1; y de acuerdo con [2.2], el conjugado armónico es único.

Si considerando [1.2], ordenamos convenientemente la relación de la definición [3.1]

$$AC : CB = AD : BD \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{BD} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD} = -1 = k \, .$$

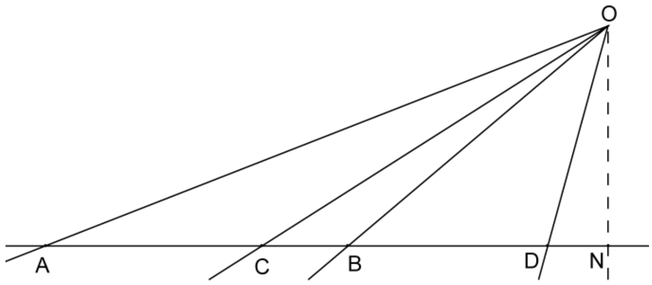
La última relación nos indica que la razón doble de cuatro puntos divididos armónicamente es -1.

3.3 LA CONJUGACIÓN ARMÓNICA Y EL PUNTO MEDIO
Aprovechamos el resultado de [2.4] y escribimos

$$\frac{AO+OC}{AO-OC}:\frac{BO+OC}{BO-OC}=-1 \Rightarrow -AO\cdot BO+OC\cdot BO-AO\cdot OC+OC\cdot OC=AO\cdot BO-AO\cdot OC+OC\cdot BO-OC\cdot OC$$

y de aquí $$OC\cdot OC=AO\cdot BO=OD\cdot OD\,.$$

3.4 DEFINICIÓN DE RECTA CONJUGADA ARMÓNICA



Cuando un ángulo AOB es dividido por las rectas OC, OD de tal modo que

$$\sin AOC:\sin COB=\sin AOD:\sin BOD\,,$$

Se dice que el ángulo AOB está dividido armónicamente por las rectas OC, OD.

La relación anterior también puede expresarse como una razón doble.

$$\sin AOC:\sin COB=\sin AOD:\sin BOD \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin AOC}{\sin COB}:\frac{\sin AOD}{\sin BOD}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin AOC}{\sin AOD}:\frac{\sin BOC}{\sin BOD}=-1\,,$$

esta relación nos indica que la razón doble [2.5] de un haz de cuatro rectas divididas armónicamente es -1.

A las rectas OC, OD se les llama rectas **conjugadas armónicas** respecto a las rectas OA, OB y el haz de rectas [OA, OB, OC, OD], que también se suele escribir como O[AB,CD], recibe el nombre de haz armónico.

3.5 TEOREMA SOBRE LA INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN HAZ DE RECTAS ARMÓNICO
Toda recta queda dividida armónicamente por un haz armónico. Si una recta arbitraria corta al haz armónico O[AB,CD] en los puntos alineados A, B, C, D; entonces la cuaterna [AB,CD] es armónica.

Trazamos por O la perpendicular a la recta AB que corta esta recta en N, entonces igualando áreas de triángulos

$$\begin{aligned} NO\cdot AC &= OA\cdot OC\cdot \mathrm{sen}AOC\\ NO\cdot AD &= OA\cdot OD\cdot \mathrm{sen}AOD\\ NO\cdot CB &= OC\cdot OB\cdot \mathrm{sen}COB\\ NO\cdot BD &= OB\cdot OD\cdot \mathrm{sen}BOD \end{aligned}$$

Por [3.4], como O[AB,CD] es un haz armónico

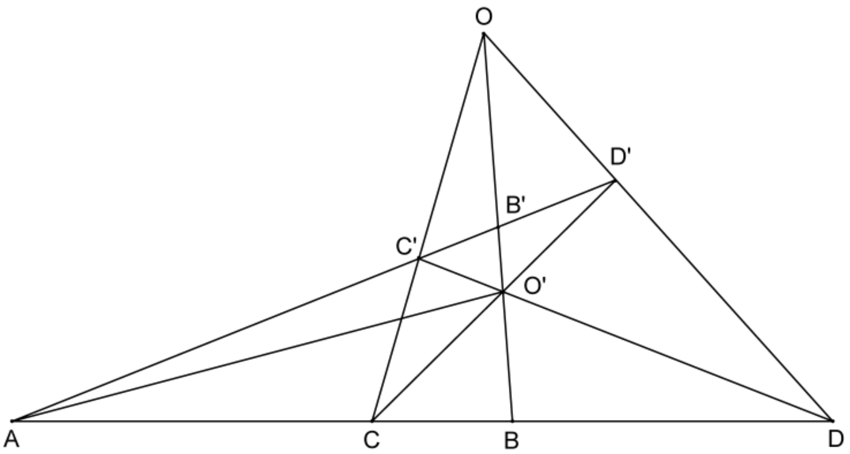
$$-1=\frac{\mathrm{sen}AOC}{\mathrm{sen}AOD}:\frac{\mathrm{sen}BOC}{\mathrm{sen}BOD}=\frac{\dfrac{NO\cdot AC}{OA\cdot OC}}{\dfrac{NO\cdot AD}{OA\cdot OD}}:\frac{\dfrac{NO\cdot BC}{OB\cdot OC}}{\dfrac{NO\cdot BD}{OB\cdot OD}}=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}\,.$$

En consecuencia, la cuaterna [AB,CD] es armónica. El mismo resultado obtenemos por medio de [2.6].

Recíprocamente, podemos probar que si [AB,CD] es armónica, el haz O[AB,CD] es armónico (si O no está en ABCD).

3.6 CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA ARMÓNICA
Si [OA, OB, OC] es un haz cualquiera, para hallar la recta conjugada armónica de la recta OC respecto de las rectas OA y OB, cortamos el haz por una recta cualquiera que encuentra al haz en los puntos A, B, C. Hallamos D conjugado armónico de C respecto a los puntos A y B. Por el teorema [3.5] recíproco y luego por [3.4], OD es la recta conjugada armónica de OC respecto a OA, OB.

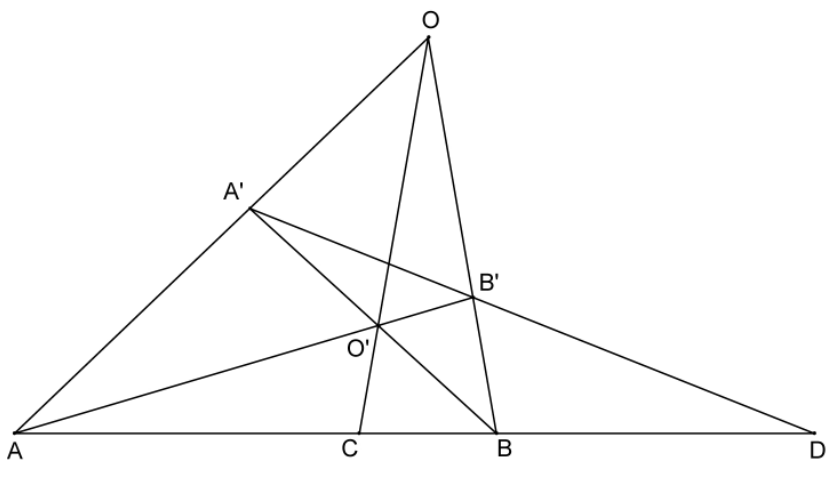
3.7 TEOREMA SOBRE CUATERNAS ARMÓNICAS EN RECTAS DISTINTAS Y CON UN PUNTO COMÚN
Si [AB,CD], [AB',C'D'] son cuaternas armónicas en rectas distintas que se cortan en A, entonces las rectas BB', CC', DD' coinciden en un punto y las rectas BB', CD', C'D también son concurrentes.



O es el punto de intersección de CC' y BB'. Trazamos OA y OD. Como O[AB,CD] es un haz armónico, la recta AB' está dividida armónicamente por OC y OD [3.5]. OC corta a AB' en C'. Como el conjugado armónico es único [3.2], OD ha de cortar a AB' en D' el punto conjugado armónico de C' respecto de A y B'.

O' es el punto de encuentro de C'D y BB', Trazamos O'A y O'C. Entonces el haz O'[AB,CD] es armónico. Se sigue como en el párrafo anterior que O'C ha de pasar por D'.

3.8 SEGUNDA CONSTRUCCIÓN DEL PUNTO CONJUGADO ARMÓNICO
El teorema [3.7] proporciona un construcción sencilla del conjugado armónico.



En una recta cualquiera tomamos tres puntos A, B y D.

Para hallar el conjugado armónico de D respecto de A y B, unimos A y B a un punto arbitrario O, trazamos una recta cualquiera por D que corta respectivamente a OA y OB en A' y B'. AB' y BA' se cortan en O'.

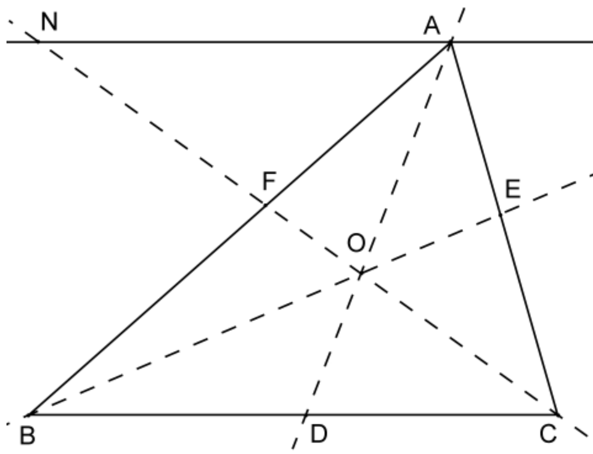
Por el teorema [3.7], la recta, que une el conjugados armónico de D respecto de A, B y el conjugado armónico de C respecto de A', B', ha de pasar por los puntos O y O'. OO' encuentra a AB en C, C ha de ser el conjugado armónico de D respecto a los puntos A y B.

4. DESARGUES, MENELAO Y CEVA, TEOREMAS PARA TRIÁNGULOS

4.1 TEOREMA DE CEVA SOBRE RECTAS CONCURRENTES POR LOS VÉRTICES DE UN TRIÁNGULO

Por medio de rectas, conectamos los vértices A, B, C de un triángulo cualquiera con un punto arbitrario O. Si cada recta corta al lado opuesto a su vértice en los puntos respectivos D, E, F entonces se cumple que

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1\,.$$



Trazamos por A, la recta NAM que es paralela a BC. Esta paralela corta a la recta BO en el punto M y a la recta CO en el punto N.

Por medio de los distintos triángulos semejantes de la figura,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AM}{NA}\\[2mm] \dfrac{CE}{EA}=\dfrac{BC}{AM}\\[2mm] \dfrac{AF}{FB}=\dfrac{NA}{BC}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{AM}{NA}\cdot\frac{BC}{AM}\cdot\frac{NA}{BC}=1$$

Recíprocamente, si D, E, F son puntos sobre los distintos lados del triángulo tales que

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1\,,$$

las rectas AD, BE, CF son concurrentes.

Sea O el punto de encuentro de BE y CF; sea D_1 el de AO y BC. Entonces por el teorema directo de Ceva

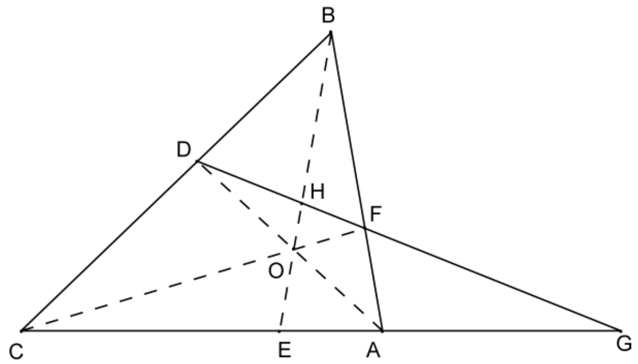
$$\frac{BD_1}{D_1C}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

De donde, combinando las dos últimas relaciones, deducimos por medio de [1.3] que

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{BD_1}{D_1C}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\quad\Rightarrow\quad\frac{DB}{DC}=\frac{D_1B}{D_1C}\quad\Rightarrow\quad(DBC)=(D_1BC)$$

Por la unicidad en [1.4], $D_1=D$; es decir, AD ha de pasar por O.

4.2 TEOREMA SOBRE RECTAS CONCURRENTES EN UN TRIÁNGULO Y HACES ARMÓNICOS
Si las rectas, que unen los vértices de un triángulo ABC a un punto arbitrario O, encuentran a los lados opuestos respectivamente en los puntos D, E, F; entonces el haz de rectas D[AC,EF] es armónico.



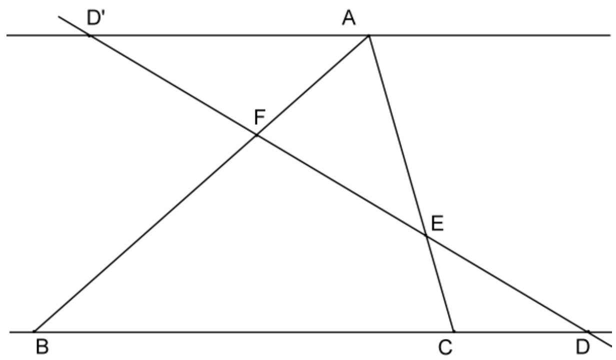
CD y AF se encuentran en B y BE también pasa por O entonces, aplicando el teorema [3.7] y la segunda construcción [3.8] del conjugado armónico, DF debe pasar por el conjugado armónico de E respecto de C y A. G es el conjugado armónico de E y en consecuencia, el haz D[AC,EF] es armónico.

Recíprocamente si D, E, F son tres puntos sobre cada uno de los lados de un triángulo ABC, de tal modo que el haz de rectas D[AC,EF] es armónico; entonces las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Como BE encuentra a DF en H, si D[AC,EF] es armónico y el haz encuentra a AC en A, C, E, G; por el teorema [3.5], deducimos que la cuaterna [CA,EG] es armónica y por tanto el haz B[DF,HG] es armónico. [GE,AC] y [GH,FD] son cuaternas armónicas en distintas rectas con un punto común G y por lo tanto, por el teorema [3.7], las rectas AD, BE y CF son concurrentes en un punto O.

4.3 TEOREMA DE MENELAO SOBRE PUNTOS ALINEADOS EN LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO
Si una recta corta a los distintos lados de un triángulo ABC respectivamente en los puntos D, E, F se cumple

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1;$$



Trazamos por A una recta paralela a BC que corta a la recta DEF en D'.

Por medio de los distintos triángulos semejantes de la figura,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{AE}{AD'}\\[2mm]\dfrac{BD}{BF}=\dfrac{AD'}{AF}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{CE}{CD}\cdot\frac{BD}{BF}=\frac{AE}{AF}\Rightarrow\frac{CE}{CD}\cdot\frac{BD}{BF}\cdot\frac{AF}{AE}=1\Rightarrow\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=-1\,.$$

Una recta que corta los lados de un triángulo suele llamarse recta **transversal**.

Recíprocamente, si D, E, F son puntos en los distintos lados de un triángulo ABC tales que

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1,$$

los puntos D, E, F están alineado sobre una misma recta.

Suponemos que la recta, que une los puntos E y F, corta a la recta BC en el punto D_1. Por el teorema directo de Menelao tenemos que

$$\frac{BD_1}{CD_1}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$$

De las dos últimas igualdades deducimos

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{BD_1}{CD_1}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF} \quad\Rightarrow\quad \frac{D_1B}{D_1C}=\frac{DB}{DC} \quad\Rightarrow\quad (D_1BC)=(DBC)$$

Por [1.4], concluimos que $D_1 = D$; en consecuencia el punto D está sobrela recta EF.

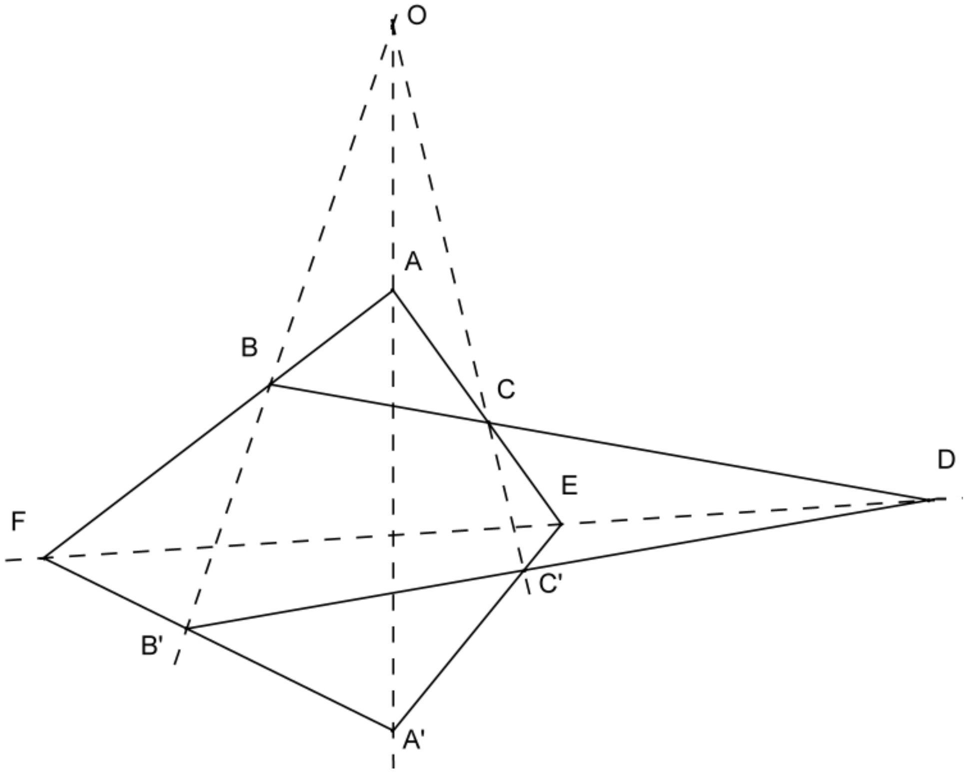
4.4 DEFINICIÓN DE TRIÁNGULOS EN PERSPECTIVA (U HOMOLÓGICOS)

Se dice que dos triángulos están **en perspectiva** (o son homológicos) cuando las rectas que conectan los vértice de un triángulo con los vértices correspondientes del otro triángulo son concurrentes.

Si ABC, A'B'C' son dos triángulos en perspectiva tales que las rectas AA', BB', CC' concurren en el punto O, los vértices A y A' son denominados vértices **correspondientes**, y los lados BC y B'C' son lados **correspondientes**. El punto O es llamado **centro de perspectiva** de los dos triángulos.

4.5 TEOREMA DE DESARGUES PARA TRIÁNGULOS EN PERSPECTIVA

Si dos triángulos están en perspectiva, los lados correspondientes de cada triángulo se cortan respectivamente en tres puntos alineados.



Sean ABC, A'B'C' dos triángulos en perspectiva, tales que AA', BB', CC' concurren en O.

Si BC y B'C' coinciden en D; CA y C'A' en E; AB y A'B' en F. Entonces D, E y F están alineados.

B'C'D es una transversal del triángulo CBO, aplicando el teorema de Menelao [4.3],

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CC'}{OC'} \cdot \frac{OB'}{BB'} = 1\,;$$

A'C'E es una transversal del triángulo CAO,

$$\frac{CE}{AE} \cdot \frac{AA'}{CC'} \cdot \frac{OC'}{OA'} = 1\,;$$

A'B'F es una transversal del triángulo BAO,

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BB'}{OB'} \cdot \frac{OA'}{AA'} = 1\,.$$

Y multiplicando las tres relaciones

Al cumplirse esta relación, el teorema de Menelao [4.3] nos asegura que D, E y F están alineados.

4.6 DEFINICIONES
La recta DEF, que pasa por los puntos de intersección de los lados correspondientes de dos triángulos en perspectiva, se llama **eje de perspectiva**.

Los triángulos en perspectiva reciben también el nombre de triángulos **homológicos**, el centro de perspectiva es el **centro de homología** y el eje de perspectiva el **eje de homología**.

4.7 TEOREMA RECÍPROCO DE DESARGUES PARA TRIÁNGULOS EN PERSPECTIVA
Si los lados correspondientes de dos triángulos se cortan respectivamente en puntos alineados, los triángulos están en perspectiva.

Siguiendo con la misma figura de [4.5], sean ECC' y FBB' dos de tales triángulos; de modo que CC', EC y EC' cortan a BB', FB y FB' en los puntos O, A y A' respectivamente.

Podemos probar, como en el teorema directo [4.5], que BC y B'C' cortan a EF en el mismo punto D.

Entonces los triángulos ECC' y FBB' están en perspectiva, siendo el punto D su centro de perspectiva.

5. LA INVOLUCIÓN, EL CUADRIVÉRTICE Y EL CUADRILÁTERO

5.1 DEFINICIÓN DE INVOLUCIÓN DE UNA SERIE DE PUNTOS

Si pares de puntos A, A'; B, B'; C, C'; ... en una misma recta son tales que sus distancias a un mismo punto O de la recta cumplen con la relación

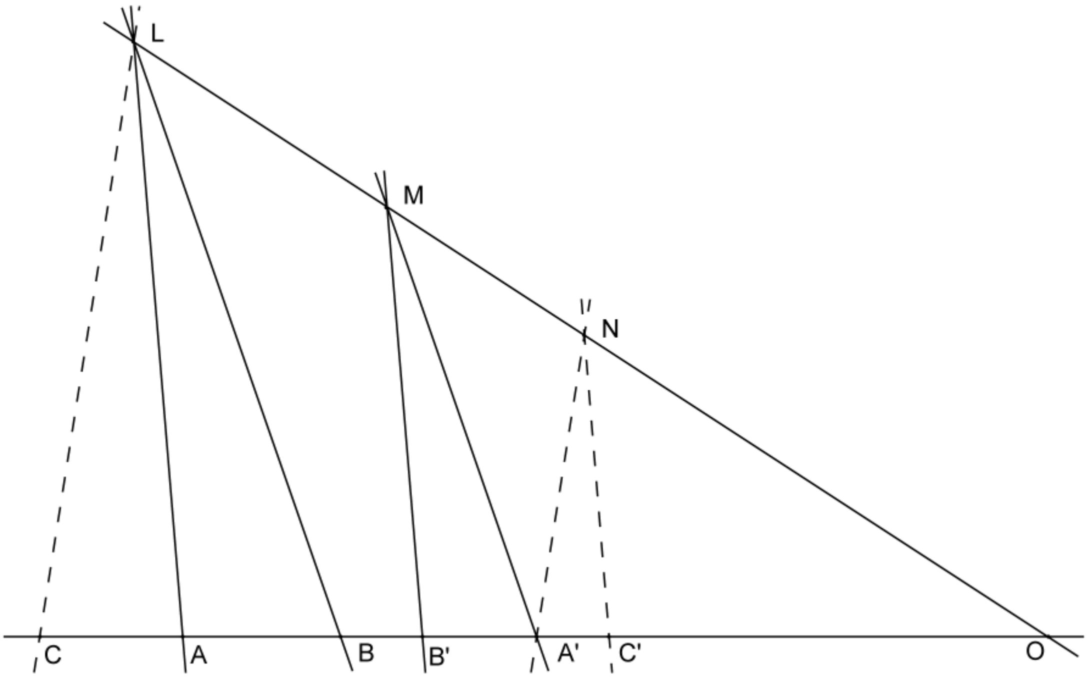
$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC' = \ldots ;$$

se dice que los puntos forman una serie en **involución**.

El punto O recibe el nombre de **centro de la involución**, y cualquier par de puntos correspondientes, tales como A y A', reciben el nombre de **puntos conjugados** o **pares** de la involución.

5.2 TEOREMA SOBRE LA INVOLUCIÓN INDUCIDA POR UN PAR DE PUNTOS Y UNICIDAD DEL CONJUGADO

Cualquier par de puntos alineados determina una serie en involución.



Sean los pares de puntos alineados A, A' y B, B'. Por A y B trazamos rectas cualesquiera que se cortan en L. Por A' y B' trazamos respectivamente paralelas a BL y AL que se cortan en M. Las rectas AB y LM se encuentran en O.

Como AL es paralela a B'M y BL lo es a A'M, $\dfrac{OA}{OB'} = \dfrac{OL}{OM} = \dfrac{OB}{OA'}$

y en consecuencia $$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' ;$$

entonces O es el centro de una serie en involución [5.1]de la que A, A' y B, B' es un par de puntos en involución.

Una vez hallado el centro O, podemos encontrar un punto C' conjugado con cualquier punto C de la recta AB trazando CL y por A' una paralela a CL que corta a OL en N; por N, una paralela a LA encuentra a AB en C'.

Es claro que $$OC \cdot OC' = OA \cdot OA' \cdot$$

Supongamos que existe C'_1 y

$$OC \cdot OC'_1 = OA \cdot OA' \quad \Rightarrow \quad OC \cdot OC' = OC \cdot OC'_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{OC}{OC'_1} = \frac{OC}{OC'} \quad \Rightarrow \quad (OCC'_1) = (OCC')$$

Por lo tanto fijados O, A, A' y C, por el teorema [1.4] $C'_1 =$ C' y en consecuencia C' es único.

5.3 TEOREMA SOBRE DISTINTAS RELACIONES PARA SERIES DE PUNTOS EN INVOLUCIÓN
Si AA', BB', CC' es una serie de puntos en involución, se cumplen las siguientes relaciones

$$\text{(i)} \qquad AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}$$

(i) Aplicando la definición de puntos en involución [5.1], si O es el centro de la involución y si aplicamos las propiedades de la razón simple mostradas en el teorema [1.5],

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \quad \Rightarrow \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} \quad \Rightarrow \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OB' - OA}{OA' - OB} = \frac{AB'}{BA'}$$

De forma análoga

$$\frac{OB}{OC} = \frac{BC'}{CB'} \quad \text{y} \quad \frac{OC}{OA} = \frac{CA'}{AC'} .$$

Multiplicando las tres últimas igualdades obtenemos

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OA} = 1 = \frac{AB'}{BA'} \cdot \frac{BC'}{CB'} \cdot \frac{CA'}{AC'} ;$$

y transformando sólo en productos

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' = BA' \cdot CB' \cdot AC'$$

que por medio de [1.2], equivale a

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A$$

Recíprocamente, si se cumple la relación anterior, los pares de puntos AA', BB', CC' están en involución.

Si se cumple la relación

$$AB' \cdot BC' \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C'A ,$$

suponemos que el punto C' no es el conjugado del punto C en la involución. Suponemos, en cambio, que A, A' y B, B' son pares de puntos conjugados y que el punto C_1 es el conjugado de C en la involución que determinan los pares A, A' y B, B' [5.2].

Por la parte directa de este teorema [5.3] (i), tenemos que

$$AB' \cdot BC_1 \cdot CA' + A'B \cdot B'C \cdot C_1A .$$

Si tomamos las dos últimas relaciones y las dividimos miembro a miembro obtenemos

$$\left.\begin{aligned} AB' \cdot BC' \cdot CA' &= -A'B \cdot B'C \cdot C'A \\ AB' \cdot BC_1 \cdot CA' &= -A'B \cdot B'C \cdot C_1A \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB' \cdot BC' \cdot CA'}{AB' \cdot BC_1 \cdot CA'} = \frac{A'B \cdot B'C \cdot C'A}{A'B \cdot B'C \cdot C_1A} ,$$

que después de simplificar y nos lleva a

$$\frac{BC'}{BC_1} = \frac{C'A}{C_1A} \quad \Rightarrow \quad \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C'A}{C'B} \quad \Rightarrow \quad (C_1AB) = (C'AB)$$

después de haber usado [1.2].

Por la unicidad en el teorema [1.4], concluimos que $C_1 = C'$ y, en consecuencia, concluimos que la serie A, A', B, B', C, C' está en involución.

(ii) De la definición [5.1] y por las propiedades de la razón simple [1.5]

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \quad \Rightarrow \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{OB' - OA}{OA' - OB} = \frac{AB'}{BA'}$$

y análogamente

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \quad \Rightarrow \quad \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{OB - OA}{OA' - OB'} = \frac{AB}{B'A'}$$

multiplicando miembro a miembro

$$\frac{OA^2}{OB \cdot OB'} = \frac{AB \cdot AB'}{BA' \cdot B'A'}\,;$$

pero retomando la definición [5.1]

$$OB \cdot OB' = OA \cdot OA' \quad \Rightarrow \quad \frac{OA^2}{OB \cdot OB'} = \frac{OA^2}{OA \cdot OA'} = \frac{OA}{OA'} = \frac{AB \cdot AB'}{BA' \cdot B'A'}\,.$$

Por el mismo procedimiento obtenemos

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AC \cdot AC'}{CA' \cdot C'A'}\,,$$

combinando las dos últimas igualdades

$$\frac{AB \cdot AB'}{BA' \cdot B'A'} = \frac{AC \cdot AC'}{CA' \cdot C'A'}$$

y cambiando de signo BA' y CA' [1.2]

$$\frac{AB \cdot AB'}{BA' \cdot B'A'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}$$

Recíprocamente, si se cumple la relación anterior, los pares de puntos AA', BB', CC' están en involución.

Suponemos que no es así; que A, A' y B, B' son pares conjugados y que el punto C_1 es el conjugado de C en la involución.

Se cumple la relación

$$\frac{AB \cdot AB'}{BA' \cdot B'A'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}$$

y por la parte directa de este teorema [5.3] (ii), tenemos además

$$\frac{AB \cdot AB'}{BA' \cdot B'A'} = \frac{AC \cdot AC_1}{A'C \cdot A'C_1}$$

De la igualdad de las dos últimas relaciones, deducimos que

$$\frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'} = \frac{AC \cdot AC_1}{A'C \cdot A'C_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{C_1A}{C_1A'} = \frac{C'A}{C'A'} \quad \Rightarrow \quad (C_1AA') = (C'AA')$$

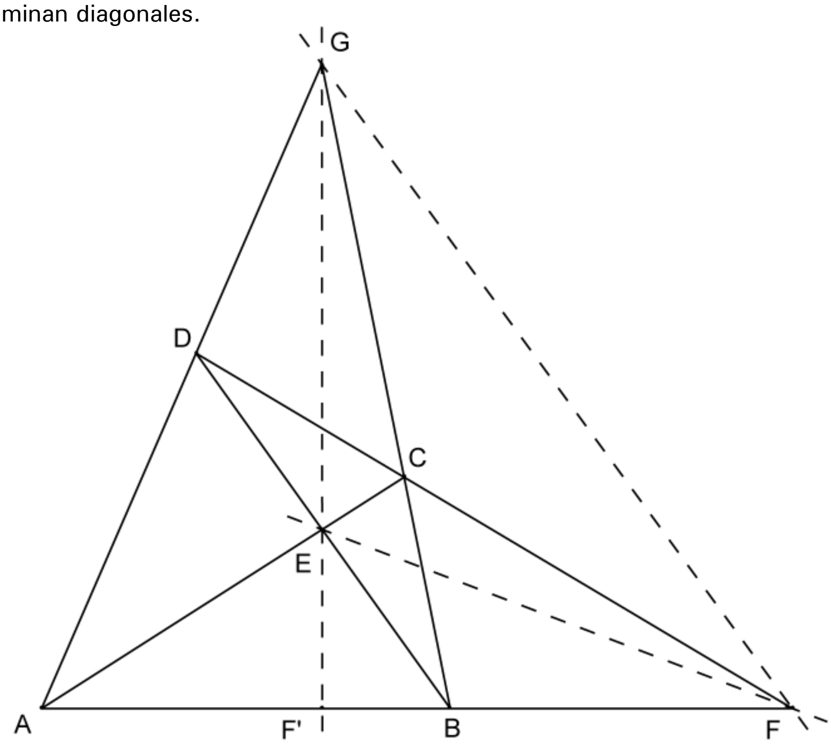
y de acuerdo con [1.4],concluimos que $C_1 = C'$ y por tanto la serie AA', BB', CC' está en involución.

5.4 DEFINICIÓN DE CUADRIVÉRTICE Y CUADRILÁTERO

Un sistema de cuatro puntos, tres a tres no alineados se denomina **cuadrivértice**. Si unimos esos puntos tenemos seis **lados**. Los lados que no tienen ninguno de los cuatro puntos en común son **opuestos**. Hay tres pares de lados opuestos y cada par de lados opuestos se corta en un **punto diagonal** y las rectas que unen los puntos diagonales son **rectas diagonales**.

Si los cuatro puntos de la definición son A, B, C y D, si el punto diagonal de AC y BD es E, si el de AB y CD es F, y el de AD y BC es G; entonces al triángulo EFG se le denomina **triángulo diagonal** del cuadrivértice.

Un sistema de cuatro rectas, tres a tres no concurrentes se denomina **cuadrilátero**. Con esas cuatro rectas obtenemos seis **vértices**. Los vértices que no pertenecen a la misma recta se denominan **opuestos**, por lo que tenemos tres pares de vértices opuestos. La recta que une dos vértices opuestos se denomina **diagonal**, y las nuevas rectas que definen esos puntos se denominan diagonales.



5.5 TEOREMA SOBRE LAS PROPIEDADES ARMÓNICAS DEL CUADRIVÉRTICE

Cualquier par de lados opuestos de un cuadrivértice son rectas conjugadas armónicas respecto de los lados del triángulo diagonal que concurren en su punto de intersección.

Tomamos el cuadrivértice ABCD tal que EFG es su triángulo diagonal y GE corta a AB en F'.

AC, BD y GE concurren en E, por [4.1],

$$\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BC}{CG}\cdot\frac{GD}{DA}=1$$

FCD es transversal al triángulo GAB, por [4.3]

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BC}{GC}\cdot\frac{GD}{AD}=1$$

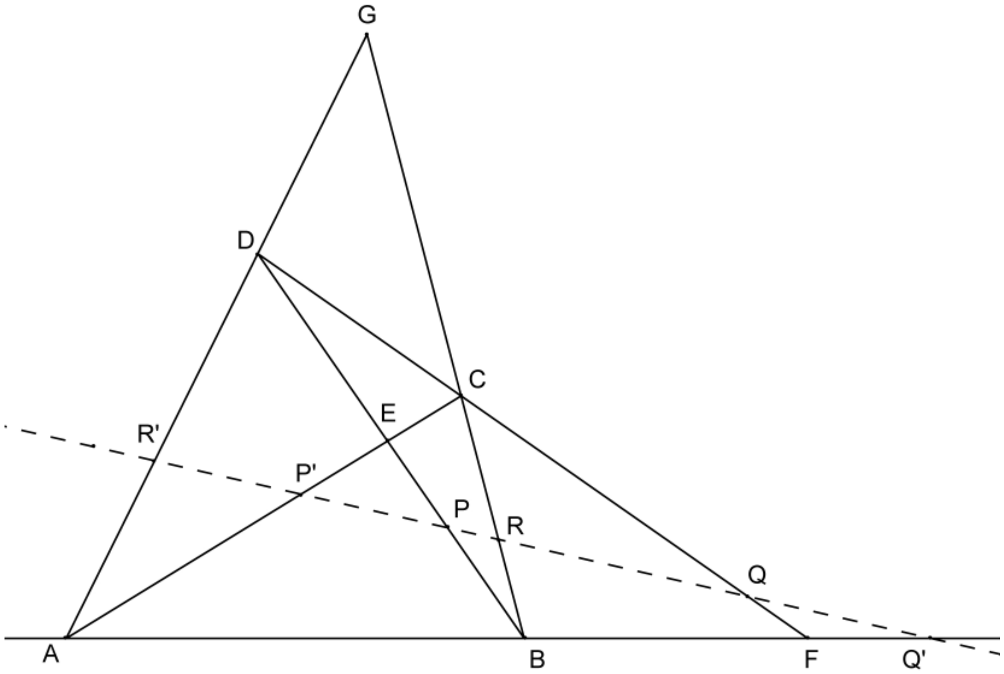
Dividiendo miembro a miembro las relaciones anteriores y usando [1.2],

$$\frac{AF'}{F'B}:\frac{AF}{BF}=1;$$

la cuaterna [FF',AB] es armónica [3.1] y en consecuencia [3.5] G[EF,AB] es un haz armónico y AD, BC son conjugadas armónica respecto de GE, GF.

5.6 TEOREMA DE DESARGUES SOBRE LA INVOLUCIÓN EN UNA TRANSVERSAL Y UN CUADRIVÉRTICE

Los tres pares de lados opuestos de un cuadrivértice cortan a cualquier recta en tres pares de puntos en involución.



Dado ABCD un cuadrivértice cualquiera, trazamos una transversal arbitraria que corta a los lados opuestos BD y AC en P y P'; a CD y AB en Q, Q'; y a BC, AD en R, R'; entonces la serie de pares de puntos PP',QQ', RR' está en involución.

Aplicamos a continuación el teorema de Menelao [4.3] a algunas de las distintas rectas y triángulos que se forman en la figura.

BD corta a los lados del triángulo AQ'R' en los puntos P, D, B

$$\frac{AB}{BQ'}\cdot\frac{Q'P}{PR'}\cdot\frac{R'D}{DA}=-1 \quad\Rightarrow\quad \frac{Q'P}{PR'}=-\frac{BQ'}{AB}\cdot\frac{DA}{R'D};$$

DC corta al triángulo AR'P' en Q, C, D,

$$\frac{R'Q}{QP'}=-\frac{DR'}{AD}\cdot\frac{CA}{P'C};$$

BC corta al triángulo AP'Q' en R, B, C,

$$\frac{P'R}{RQ'}=-\frac{CP'}{AC}\cdot\frac{BA}{Q'B}.$$

Y ahora, multiplicando miembro a miembro las tres últimas relaciones y con [1.2], deducimos que

$$\frac{Q'P}{PR'}\cdot\frac{R'Q}{QP'}\cdot\frac{P'R}{RQ'}=-\frac{BQ'}{AB}\cdot\frac{DA}{R'D}\cdot\frac{DR'}{AD}\cdot\frac{CA}{P'C}\cdot\frac{CP'}{AC}\cdot\frac{BA}{Q'B}=-1 \quad\Rightarrow\quad Q'P\cdot R'Q\cdot P'R=-PR'\cdot QP'\cdot RQ'$$

y obtenemos

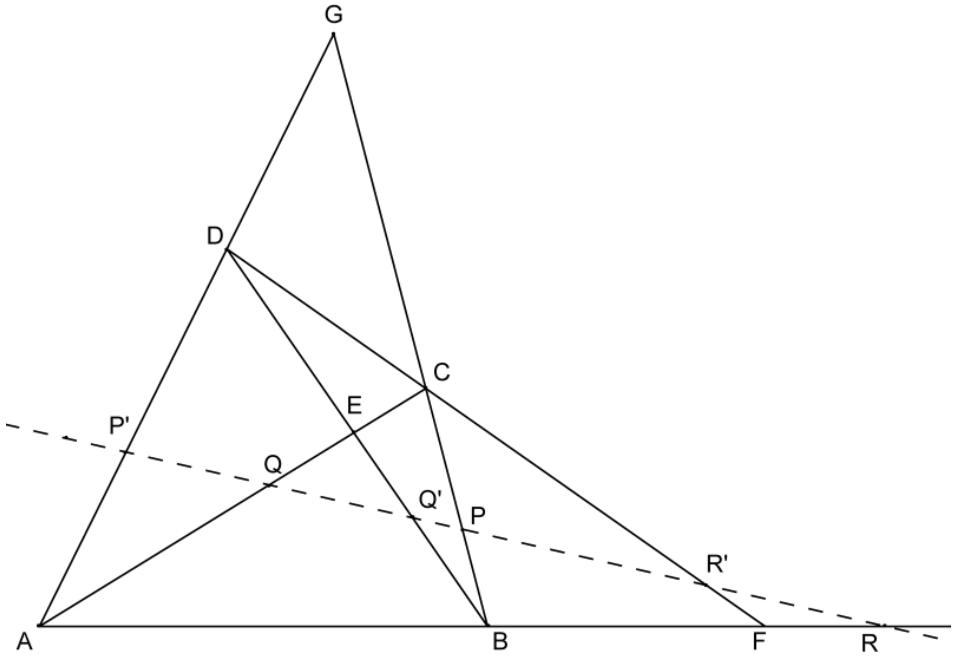
$$Q'P\cdot R'Q\cdot P'R+PR'\cdot QP'\cdot RQ'=0\;;$$

ordenando y usando [1.2]

$$PQ'\cdot QR'\cdot RP'+P'Q\cdot Q'R\cdot R'P=0$$

en consecuencia, de acuerdo con la relación [5.3 (i)], los pares de puntos PP', QQ' y RR' están en involución.

5.7 TEOREMA DE DESARGUES RECÍPROCO AL TEOREMA [5.6]



Para probar el recíproco, partiremos de tres puntos A, B, C. Una transversal cortará al triángulo ABC en tres puntos. Tomaremos sobre esa transversal tres puntos más que estén en involución con los tres anteriores, veremos que las rectas que unen los vértices con estos tres últimos puntos concurren en un punto D y que, en consecuencia, los seis puntos en involución de la transversal estarán respectivamente sobre los lados opuestos del cuadrivértice ABCD.

Si una transversal corta los lados de un triángulo ABC en tres puntos P, Q, R que junto con otros tres puntos P', Q', R' de la misma transversal forman tres pares en involución, entonces las tres rectas AP', BQ', CR' concurren en un mismo punto D. Con lo que los pares en involución se hallan sobre los lados opuestos del cuadrivértice ABCD.

Suponemos que AP' y BQ' se encuentran en D. Suponemos que DC encuentra a la transversal en R". Aplicamos el teorema directo de Desargues [5.6] al cuadrivértice ABCD y obtenemos

$$PQ' \cdot QR'' \cdot RP' + P'Q \cdot Q'R \cdot R''P = 0$$

pero por hipótesis los puntos P, Q, R y los puntos P', Q', R' están en involución; entonces [5.3] (i)

$$PQ' \cdot QR' \cdot RP' + P'Q \cdot Q'R \cdot R'P = 0 \quad \Rightarrow \quad PQ' \cdot QR' \cdot RP' = -P'Q \cdot Q'R \cdot R'P$$

e igualando las dos relaciones

$$PQ' \cdot QR'' \cdot RP' + P'Q \cdot Q'R \cdot R''P = PQ' \cdot QR' \cdot RP' + P'Q \cdot Q'R \cdot R'P$$
$$PQ' \cdot QR'' \cdot RP' - PQ' \cdot QR' \cdot RP' = P'Q \cdot Q'R \cdot R'P - P'Q \cdot Q'R \cdot R''P$$
$$PQ' \cdot (QR'' - QR') \cdot RP' = P'Q \cdot Q'R \cdot (R'P - R''P)$$
$$PQ' \cdot (R'R'') \cdot RP' = P'Q \cdot Q'R \cdot (R'R'')$$
$$PQ' \cdot QR' \cdot RP' \cdot \left(\frac{R'R''}{QR'}\right) = P'Q \cdot Q'R \cdot R'P \cdot \left(\frac{R'R''}{R'P}\right)$$

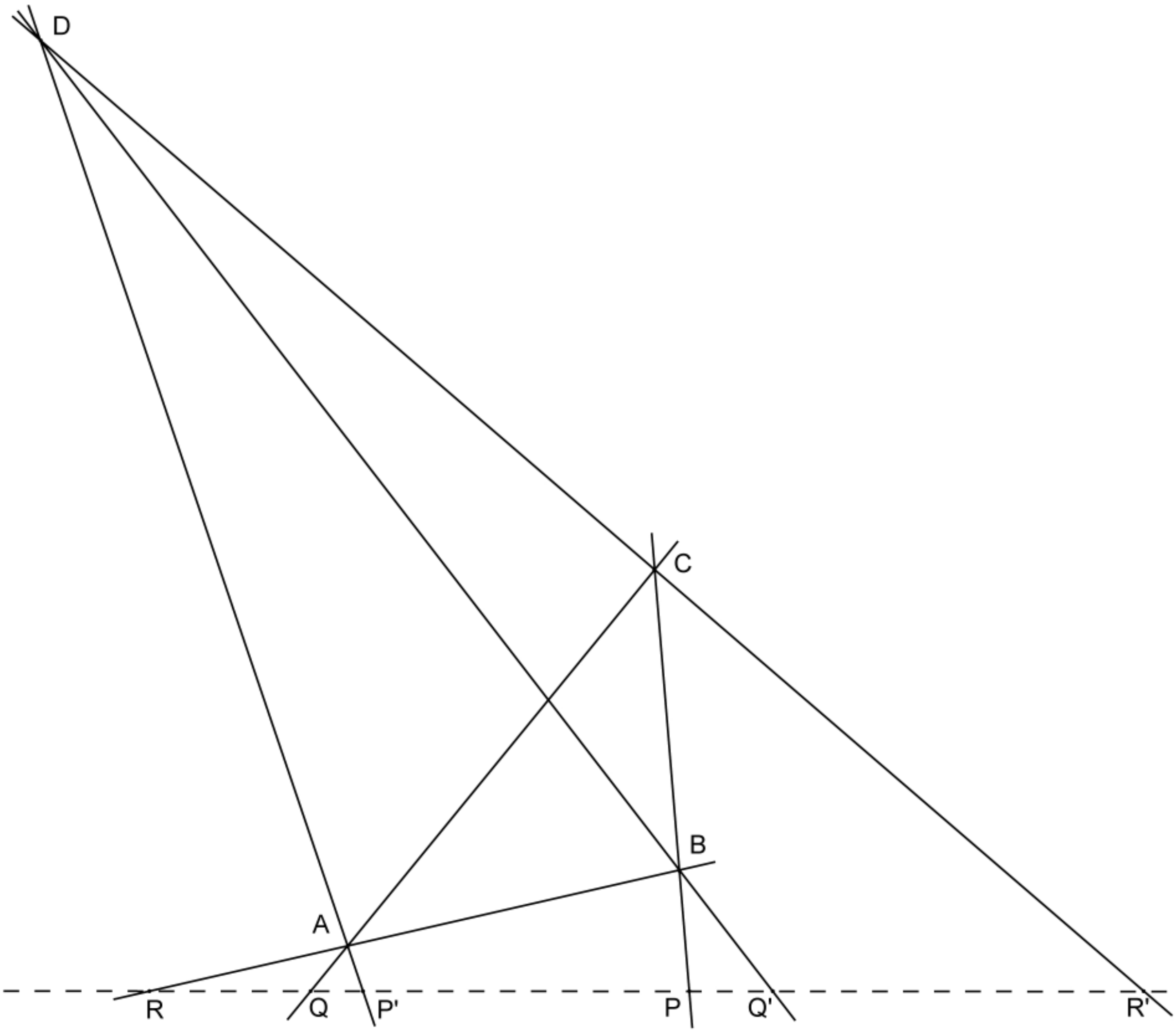
e introduciendo, de nuevo, la relación de involución [5.3 (i)]

$$\frac{R'R''}{QR'} = -\frac{R'R''}{R'P} \quad \Rightarrow \quad R'R'' \cdot (R'P + QR') = 0 \quad \Rightarrow \quad R'R'' \cdot QP = 0 \quad \Rightarrow \quad R'R'' = 0 \quad \Rightarrow \quad R' = R''$$

R" coincide con R' y por lo tanto CR' pasa por D.

5.8 CONSTRUCCIÓN, SIN NECESIDAD DEL CENTRO, DEL SEXTO PUNTO EN INVOLUCIÓN

Este último teorema (y el [5.6]) sugiere una construcción sencilla, sin necesidad del centro de involución [5.2], para determinar el punto R' conjugado, en la involución, del punto R en la involución determinada por dos pares de puntos conjugados P, P'; y Q, Q'[5.2].



Basta repetir los pasos seguidos en [5.7].

Trazamos tres rectas cualesquiera respectivamente por los puntos P, Q, R. Estas tres rectas definen el triángulo ABC.

Llamamos D al punto de encuentro de las rectas P'A y Q'B.

La recta CD corta a la recta PQ en R'. R' es el conjugado de R en la involución determinada por los dos pares P, P' y Q, Q'.

Al igual que en [5.7], si suponemos que CD corta a la recta PQ, en un punto R" distinto de R', llegamos a que R" coincide con R' y por lo tanto el conjugado es único.

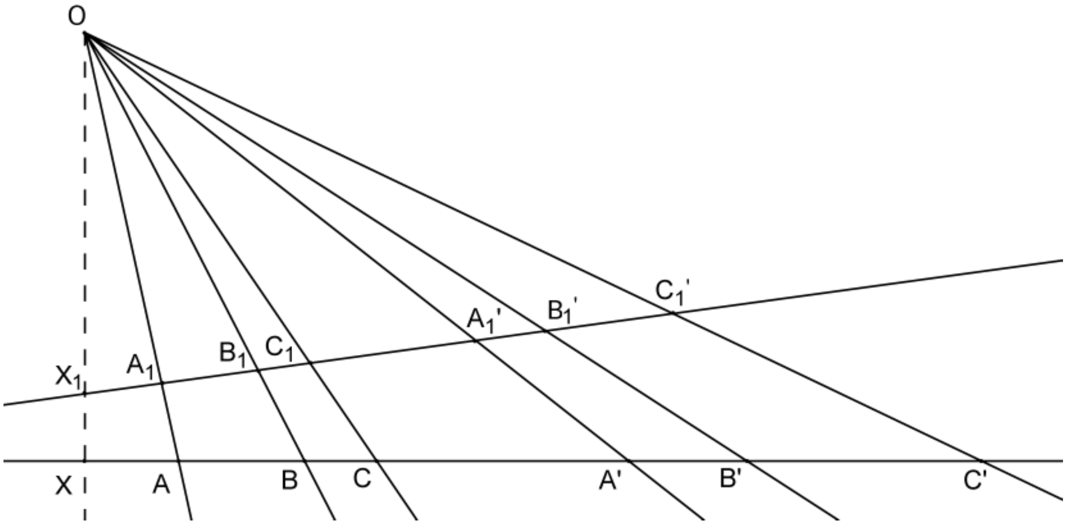
5.9 DEFINICIÓN DE INVOLUCIÓN DE UN HAZ DE RECTAS

Cuando varios pares de rectas OA y OA', OB y OB', 0C y 0C', ... concurrentes en un punto 0, son tales que los ángulos, que forman con una recta fija OX, cumplen con la siguiente relación

$$\tan XOA \cdot \tan XOA' = \tan XOB \cdot \tan XOB' = \tan XOC \cdot \tan XOC' = \cdots$$

se dice que las rectas forman un haz en **involución** y cualquier par de rectas correspondientes como OA y OA' reciben el nombre de rectas conjugadas del haz.

5.10 TEOREMA SOBRE DISTINTAS RELACIONES PARA LOS HACES DE RECTAS EN INVOLUCIÓN



(i) Suponemos que cortamos el haz por una recta perpendicular a la recta fija OX [5.9] en el punto X. Entonces

$$\tan XOA = \frac{XA}{OX} \quad \text{y} \quad \tan XOA' = \frac{XA'}{OX} \quad \cdots$$

si sustituimos en la definición [5.9] estas tangentes, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \tan XOA \cdot \tan XOA' &= \frac{XA}{OX}\cdot\frac{XA'}{OX} \\ \tan XOB \cdot \tan XOB' &= \frac{XB}{OX}\cdot\frac{XB'}{OX} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{XA}{OX}\cdot\frac{XA'}{OX} = \frac{XB}{OX}\cdot\frac{XB'}{OX} = \cdots \quad \Rightarrow \quad XA\cdot XA' = XB\cdot XB' = \cdots$$

que es la definición [5.1] de puntos en involución para los puntos de intersección A, A', B, B', ... ; por [5.3 (i)]

$$0 = AB'\cdot BC'\cdot CA' + A'B\cdot B'C\cdot C'A$$

Entonces, considerando las áreas de los triángulos formados

$$OX\cdot AB = OA\cdot OB\cdot \mathrm{sen}AOB \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{OA\cdot OB}{OX}\cdot \mathrm{sen}AOB$$

y aplicando la relación [5.3] a los puntos en involución

$$0 = \frac{OA\cdot OB'}{OX}\cdot \mathrm{sen}AOB'\cdot\frac{OB\cdot OC'}{OX}\mathrm{sen}BOC'\cdot\frac{OC\cdot OA'}{OX}\mathrm{sen}COA' + \frac{OA'\cdot OB}{OX}\mathrm{sen}A'OB\cdot\frac{OB'\cdot OC}{OX}\mathrm{sen}B'OC\cdot\frac{OC'\cdot OA}{OX}\mathrm{sen}C'OA$$

$$0 = (\mathrm{sen}AOB'\cdot \mathrm{sen}BOC'\cdot \mathrm{sen}COA' + \mathrm{sen}A'OB\cdot \mathrm{sen}B'OC\cdot \mathrm{sen}C'OA)\cdot OA\cdot OB'\cdot OB\cdot OC'\cdot OC\cdot OA'$$
$$0 = \mathrm{sen}AOB'\cdot \mathrm{sen}BOC'\cdot \mathrm{sen}COA' + \mathrm{sen}A'OB\cdot \mathrm{sen}B'OC\cdot \mathrm{sen}C'OA$$

Recíprocamente, podemos decir que si en un haz de rectas se cumple la relación anterior entre los senos, el haz de rectas está en involución, basta tener en consideración la parte recíproca de [5.3 (i)].

(ii) Del mismo modo, hallamos que si OA, OA', OB, OB', OC, OC' es una haz de rectas en involución se cumple la siguiente relación

$$\frac{\mathrm{sen}AOB\cdot \mathrm{sen}AOB'}{\mathrm{sen}A'OB\cdot \mathrm{sen}A'OB'} = \frac{\mathrm{sen}AOC\cdot \mathrm{sen}AOC'}{\mathrm{sen}A'OC\cdot \mathrm{sen}A'OC'}\ .$$

Recíprocamente, podemos decir que si en un haz se cumple la relación anterior entre los senos, el haz de rectas está en involución, basta tener en consideración la parte recíproca de [5.3] (ii).

5.11 COROLARIO AL TEOREMA [5.10] PARA HACES DE RECTAS Y SERIES DE PUNTOS EN INVOLUCIÓN
Si un haz de rectas en involución se corta por cualquier recta, la serie de puntos obtenida está en involución y recíprocamente (ver figura [5.10]).

Si llamamos θ al ángulo que forman la recta fija OX y la recta A_1B_1; por el mismo tipo de cálculo anterior de las áreas de los triángulos de la figura en [5.10], obtenemos

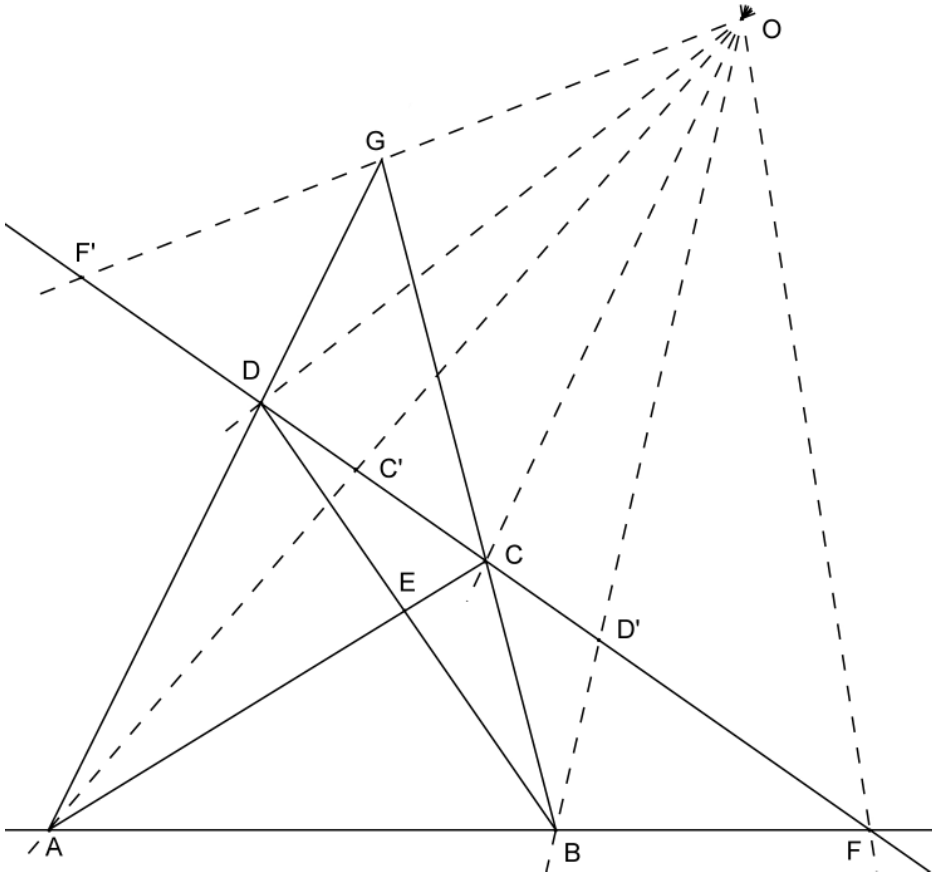
$$OX_1 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot A_1B_1 = OA_1 \cdot OB_1 \cdot \operatorname{sen}A_1OB_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{OX_1 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot A_1B_1}{OA_1 \cdot OB_1} = \operatorname{sen}A_1OB_1 = \operatorname{sen}AOB$$

y sustituyendo en la relación de senos de un haz en involución [5.10]

$$0 = A_1B_1' \cdot B_1C_1' \cdot C_1A_1' + A_1'B_1 \cdot B_1'C_1 \cdot C_1'A_1$$

que nos indica que A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C_1', ... es una serie de puntos en involución ([5.3] recíproco).

5.12 TEOREMA DE DESARGUES DE LA INVOLUCIÓN EN RECTAS CONCURRENTES Y UN CUADRILÁTERO
Las rectas que unen los tres pares de vértices opuestos de un cuadrilátero con un punto cualquiera del plano forman un haz de tres pares de rectas en involución.



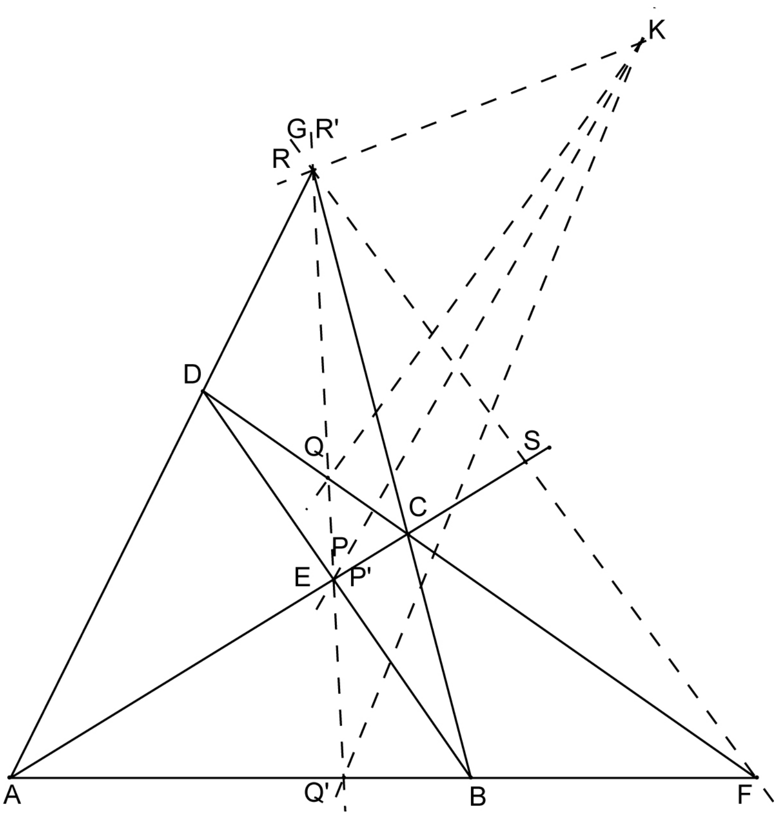
Dado un punto arbitrario O y un cuadrilátero cualquiera, las seis rectas OA, OC, OB, OD, OF, OG, que unen O con los vértices A, B, C, D y los puntos diagonales F y G, constituyen un haz en involución.

Este resultado es sencillo de obtener como consecuencia del teorema de Desargues para el cuadrivértice [5.6].

Consideramos el cuadrivértice OGAB. AO y BG son las diagonales de este cuadrivértice.

Consideramos el lado CD del cuadrilátero original como transversal del cuadrivértice OGAB. Esta recta CD corta al haz en seis puntos F', D, C', D', D' y F. Por el teorema de Desargues para el cuadrivértice [5.6], los pares C y C', D y D', F y F' están en involución y por lo tanto los tres pares de rectas que pasan por estos puntos OC y OA, OD y OB, OF y OG, son tres pares de rectas en involución([5.11] recíproco).

5.13 PUNTOS Y RECTAS DOBLES EN LA INVOLUCIÓN



Si la transversal del teorema de Desargues [5.6] coincide con una diagonal del cuadrivértice, por ejemplo EG, los puntos P y P' coinciden con E y los puntos R y R' coinciden con G. Es decir, los dos puntos de encuentro con las otras dos diagonales son sus propios conjugados. Los puntos que son conjugados de sí mismos reciben el nombre de **puntos dobles** de la involución.

Si la transversal coincide con la diagonal AC, el primer punto doble es el punto diagonal E y el segundo punto doble es S el punto de intersección de AC con la diagonal FG.

Si atendemos a la definición [5.1] de puntos en involución, tenemos para los puntos dobles

$$OP \cdot OP' = OR \cdot OR' = OQ \cdot OQ' \quad \Rightarrow \quad OE^2 = OG^2 = OQ \cdot OQ',$$

expresión que es real si $OQ \cdot OQ' \geq 0$. De ahí que, cuando los puntos conjugados están del mismo lado del centro de la involución, hay dos puntos dobles. En caso contrario, los puntos dobles son **imaginarios**.

5.14 TEOREMA SOBRE LAS PROPIEDADES ARMÓNICAS DE LOS ELEMENTOS DOBLES DE LA INVOLUCIÓN

Todo par conjugado en la involución es conjugado armónico respecto de los puntos dobles y recíprocamente.

De acuerdo con [5.1], si E, G son los puntos dobles de la involución y O es el centro de esa involución

$$OE \cdot OE = OG \cdot OG = OQ \cdot OQ';$$

pero de acuerdo con [3.3], O ha de ser el punto medio de los puntos dobles E y G y además Q y Q' son conjugados armónicos respecto de los puntos dobles E y G.

De otro modo, con la misma figura de [5.13], si nos fijamos en los lados y las diagonales que parten del punto F, basta considerar el teorema [5.5] sobre las propiedades armónicas del cuadrivértice y su triángulo diagonal, para ver que el par Q y Q' de la involución son conjugados armónicos respecto a los puntos dobles E y G. Análogamente, si consideramos un haz de rectas cualquiera, por ejemplo, KE, KG, KQ, KQ', el haz está en involución y las rectas KE y KG son las rectas dobles del haz y, por el recíproco de [3.5], las rectas KQ, KQ' son rectas conjugadas armónicas respecto las rectas dobles KE y KG.

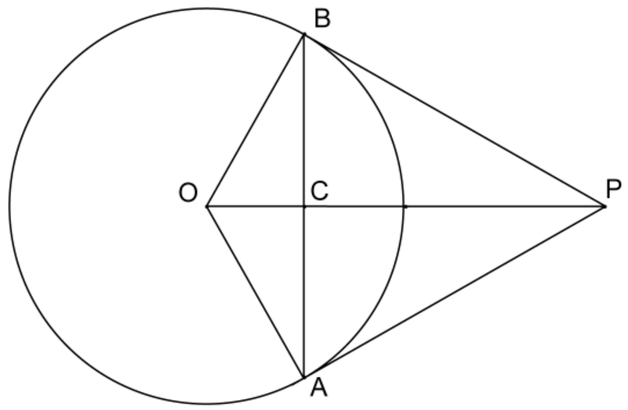
6 CÓNICAS Y EL TEOREMA DE DESARGUES

6.1 TEOREMA SOBRE TANGENTES DESDE UN PUNTO A UNA CIRCUNFERENCIA Y PERPENDICULARIDAD

Si por un punto P exterior a una circunferencia de centro O, se trazan las tangentes desde P a la circunferencia, la recta OP es perpendicular a la cuerda que une los puntos de contacto.

Los triángulos OAP y OBP tienen el lado OP en común y por ser PA y PB tangentes a la circunferencia, se cumple que

$$\angle OAP = \angle OBP = 90° \quad \text{y} \quad OA = OB\,;$$



pero de las igualdades de triángulos, los que tienen un ángulo y dos lados iguales, son iguales y por lo tanto

$$PA = PB \quad \text{y} \quad \angle APO = \angle BPO$$

Sea C el punto de corte de AB (cuerda de contacto) con OP; entonces tenemos que los triángulos ACP y BCP tienen PC en común, que añadido a los dos resultados anteriores nos dice que estos triángulos son iguales; y por tanto

$$AC = BC$$

que nos indica que C es el punto medio de AB por lo tanto PC (OP) es la mediatriz de AB y en consecuencia, OP es perpendicular a la cuerda AB (por las propiedades del lugar de los puntos que equidistan de A y B).

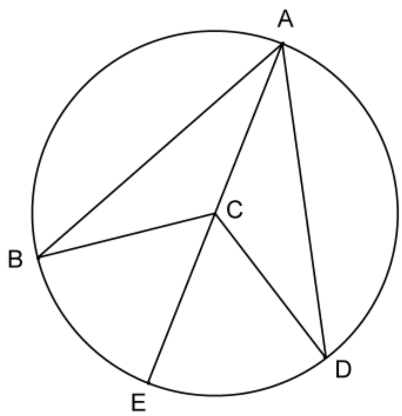
Además

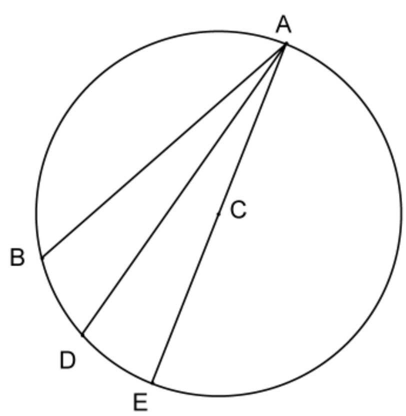
$$90° = \angle OBP = \angle OBC + \angle CBP = \angle OBC + (90° - \angle BPC) \quad \Rightarrow \quad \angle OBC = \angle BPC\ ,$$

de lo que se desprende que **los ángulos con lados perpendiculares son iguales**.

6.2 TEOREMA SOBRE EL ARCO DEL ÁNGULO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

El ángulo BAD inscrito en una circunferencia de centro C tiene por medida la mitad del arco BD comprendido entre sus lados.





Suponemos primero que el centro C es interior al ángulo BAD. Trazamos el diámetro AE y los radios CB y CD.

$$\angle BCE = 180° - \angle BCA = \angle CAB + \angle ABC\ ;$$

pero el triángulo BAC es isósceles

$$\angle CAB = \angle ABC \quad \Rightarrow \quad \angle BCE = 2\angle BAC\ ;$$

y como $\angle BCE$ es un ángulo en el centro, su medida es el arco BE, de donde

$$\angle BAC = \frac{\overset{\frown}{BE}}{2}$$

y análogamente

$$\angle CAD = \frac{\overset{\frown}{ED}}{2}\ ;$$

entonces

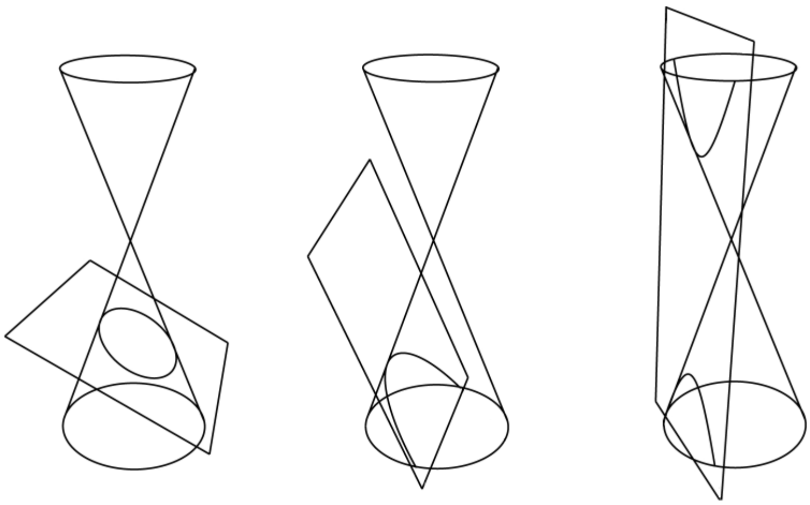
$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \frac{\overset{\frown}{BE}}{2} + \frac{\overset{\frown}{ED}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}\ .$$

Si suponemos que el centro C está fuera del ángulo BAD

$$\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = \frac{\overset{\frown}{BE}}{2} - \frac{\overset{\frown}{ED}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$$

6.3 COROLARIO AL TEOREMA [6.2]
Todos los ángulos BAC, BDC, ... inscritos en el mismo segmento BC son iguales ya que todos tienen por medida la mitad del arco BOC y son la mitad del mismo ángulo en el centro.

6.4 DEFINICIÓN DE CÓNICA
Se llama **sección cónica**, o simplemente **cónica**, a las curvas por las que un cono de base circular (extendido indefinidamente a ambos lados del vértice) puede ser cortado por un plano cualquiera.



(i) Si el plano cualquiera corta todas las aristas del cono, lo corta en una curva cerrada llamada **elipse**.

(ii) Si el plano es paralelo a algún plano tangente del cono lo corta en una curva con una rama infinita o **Parábola**.

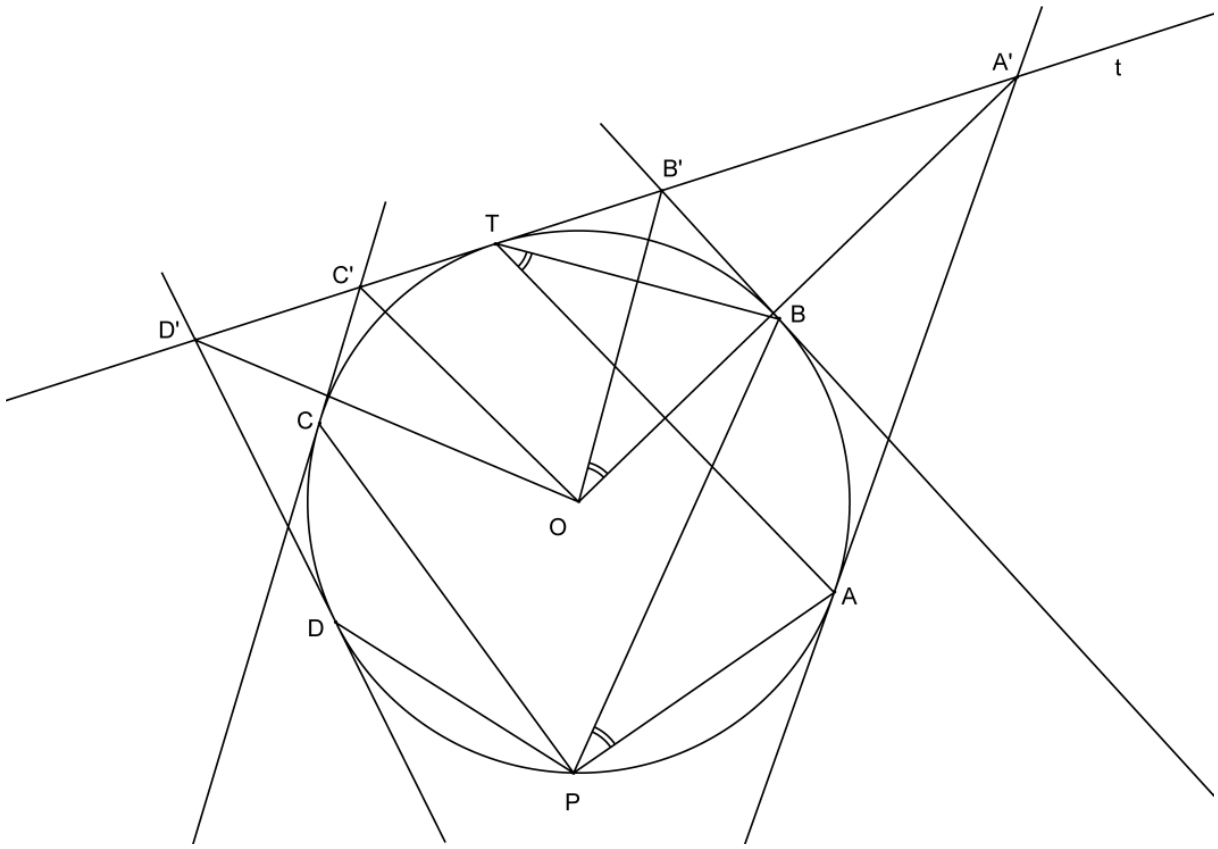
(iii) Si el plano es paralelo a dos aristas del cono, lo corta en una curva con dos ramas infinitas de nombre **hipérbola**.

6.5 TEOREMA SOBRE UNA PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE L A LA CÓNICA

Sean las tangentes por cuatro puntos de una cónica y sean otras cuatro rectas, por esos cuatro puntos, concurrentes en un punto cualquiera de la curva. La razón doble de estas cuatro rectas será igual a la de los cuatro puntos de encuentro de las cuatro tangentes con una quinta tangente cualquiera e independiente del punto arbitrario elegido como vértice del haz de rectas.

Como, por [2.9] (o corolario [2.7]), las proyecciones (en este caso, centro de proyección el vértice del cono y rayos las aristas, ver [6.4] definición de cónica y [2.8] definición de proyección) conservan la razón doble de cuatro puntos alineados y de cuatro rectas concurrentes, basta demostrar este teorema [6.5] para el círculo que forma la base del cono sobre el que se considere la cónica.

Sobre el círculo, la prueba no sólo es más sencilla sino que resulta casi evidente.



Sean A, B, C, D cuatro puntos del círculo; AA', BB', CC', DD' las tangentes en estos cuatro puntos y A', B', C', D' los puntos de encuentro de estas tangentes con t la quinta tangente al círculo por un quinto punto arbitrario T.

Demostramos el enunciado del teorema para el círculo considerado; cuyo enunciado, atendiendo a los puntos de la figura, es el siguiente:

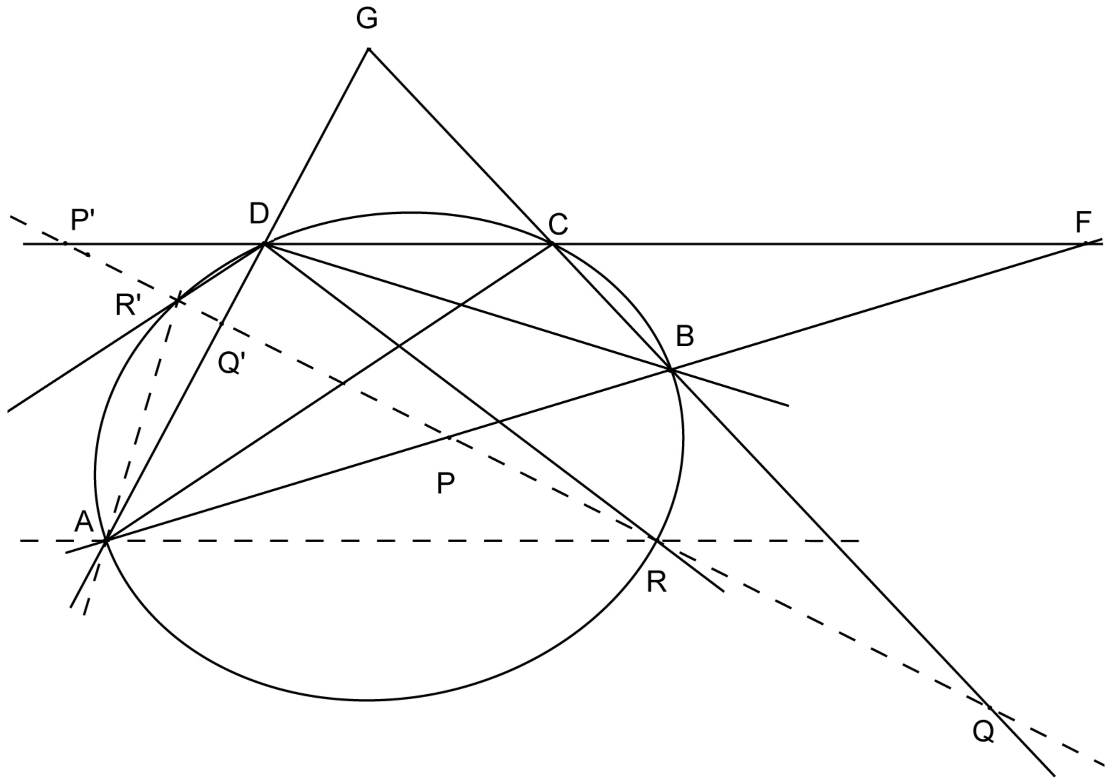
> **Sea P un punto cualquiera del círculo. El haz de rectas PA, PB, PC, PD tiene la misma razón doble que los cuatro punto alineados A', B', C', D' y por lo tanto es independiente de P**.

Por el corolario [6.3], el ángulo ∠APB es igual al ángulo ∠ATB; el ángulo ∠ATB es, a su vez, igual al ángulo ∠A'OB' por ser ángulos con los lados perpendiculares [6.1].

Entonces las rectas PA, PB, PC, PD forman entre sí los mismos ángulos que las rectas OA', OB', OC', OD' y en consecuencia, los dos haces tienen la misma razón doble [2.5]. Como por el teorema [2.6], OA', OB', OC', OD' tiene la misma razón doble que A', B', C', D', obtenemos el resultado buscado.

Caracterizada la cónica, procedemos a la extensión del teorema [5.6] de Desargues a un cuadrivértice inscrito en una cónica. De modo análogo, también extendemos el teorema [5.12] de Desargues a un cuadrilátero circunscrito a una cónica. En realidad, estos teoremas con la cónica son los teoremas originales de Desargues.

6.6 TEOREMA DE DESARGUES PARA EL CUADRIVÉRTICE INSCRITO EN UNA CÓNICA
Cuando un cuadrivértice está inscrito en una cónica, una transversal cualquiera encuentra a los pares de lados opuestos **y a la cónica** en pares de puntos en involución.



Sea ABCD el cuadrivértice inscrito en la cónica dada y sea RR' los puntos de encuentro de la cónica con la transversal que encuentra al par de lados opuestos AB, CD en P, P' y al par BC, DA en Q, Q' respectivamente.

El haz de rectas [AR, AR', AB, AD] corta a la transversal en la serie de puntos [R, R', P, Q']; por medio del teorema [2.6], de igualdad de razones dobles entre puntos y rectas, podemos escribir

$$(RR'PQ') = A(RR'BD)$$

y, del mismo modo, para el haz de rectas [CR, CR', CB, CD],

$$C(RR'BD) = (RR'QP') \;;$$

pero al ser R, R', B y D cuatro puntos de la cónica y A y C también, el teorema [6.5] de caracterización de las cónicas, nos dice que la razón doble de los dos haces anteriores no depende de A ni depende de C; por tanto escribimos

$$(RR'PQ') = A(RR'BD) = C(RR'BD) = (RR'QP')$$

y desarrollando las razones dobles [2.1], nos queda

$$\frac{RP}{RQ'} : \frac{R'P}{R'Q'} = \frac{RQ}{RP'} : \frac{R'Q}{R'P'}$$

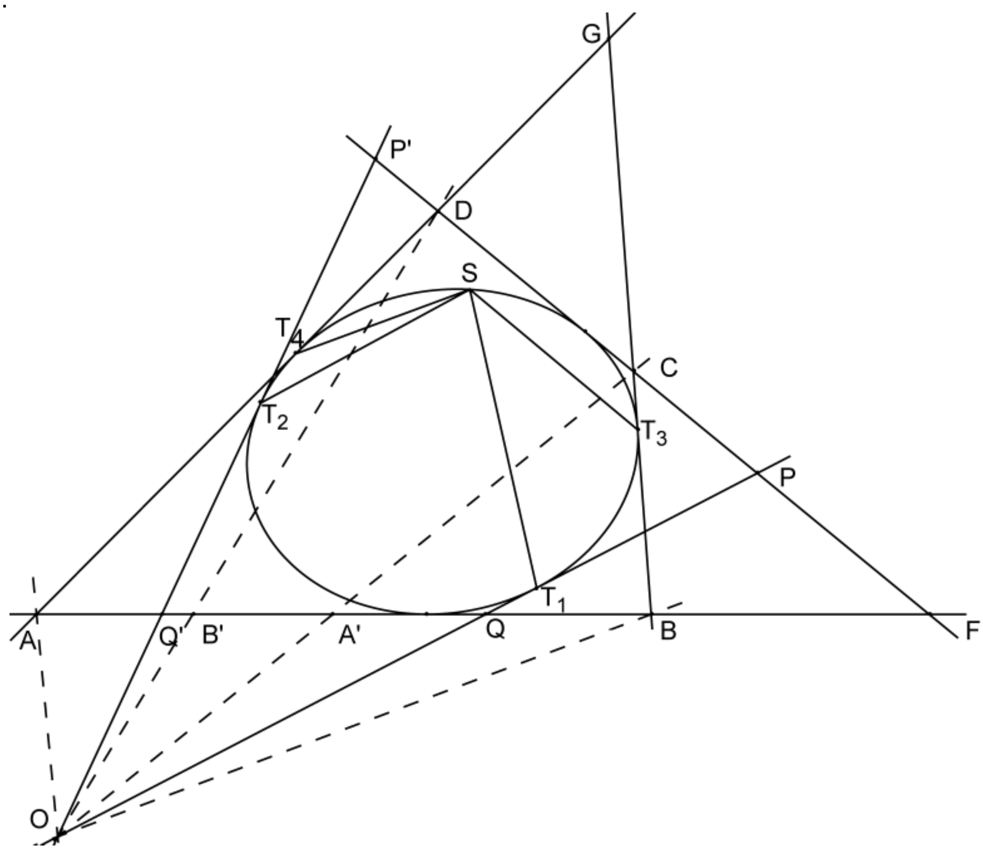
y ordenando convenientemente

$$\frac{RP \cdot RP'}{R'P \cdot R'P'} = \frac{RQ \cdot RQ'}{R'Q \cdot R'Q'}$$

que por el teorema recíproco de [5.3] (ii), es la relación que nos indica que la serie P, P', Q, Q', R, R' está en involución.

6.7 TEOREMA DE DESARGUES PARA EL CUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO A UNA CÓNICA

En un cuadrilátero circunscrito a una cónica, si desde un punto trazamos rectas por los vértices y las dos tangentes a la curva, entonces esas tangentes y los pares de rectas por vértices opuestos del cuadrilátero, son pares de rectas en involución.



Sean los pares de vértices opuestos A y C, B y D, F y G de un cuadrilátero circunscrito a una cónica. Tomamos cuatro tangentes, las dos desde un punto O y los dos lados que se cortan en G. Estas cuatro tangentes de puntos de contacto respectivos T_1, T_2, T_3 y T_4 cortan a una quinta tangente (el lado por D y C) en P, P', C y D respectivamente; entonces por el teorema [6.5] si tomamos un punto cualquiera S de la cónica se cumple la igualdad de razones dobles

$$(PP'CD) = S(T_1T_2T_3T_4)\ .$$

Pero esas tangentes cortan otra tangente (el lado por A y B) en Q, Q', B y A; entonces por [6.5] deducimos

$$(PP'CD) = S(T_1T_2T_3T_4) = (QQ'BA)\ ,$$

Si consideramos ahora las rectas del haz de vértice O; OP, OQ y OP' OQ'; y aplicamos [2.6]

$$O(QQ'BA) = O(PP'CD) = O(QQ'CD)$$

y como además OC y OD cortan al lado por A y B en A' y B' respectivamente

$$O(QQ'BA) = O(QQ'CD) = O(QQ'A'B')$$

y otra vez con [2.6] en la recta por A y B $\qquad (QQ'BA) = (QQ'A'B')$

y por [2.1] $$\frac{QB}{QA} : \frac{Q'B}{Q'A} = \frac{QA'}{QB'} : \frac{Q'A'}{Q'B'} \quad \Rightarrow \quad \frac{QB \cdot QB'}{Q'B' \cdot Q'B} = \frac{QA \cdot QA'}{Q'A' \cdot Q'A}$$

que por el teorema recíproco de [5.3] (ii), nos indica que la serie Q, Q', A, A', B, B' está en involución y por tanto, de acuerdo con la parte recíproca de [5.11] y [5.10] los pares del haz $OQ = OT_1$ y $OQ' = OT_2$, OA y OC, OB y OD están en involución.

7. POLOS Y POLARES RESPECTO DE UNA CÓNICA

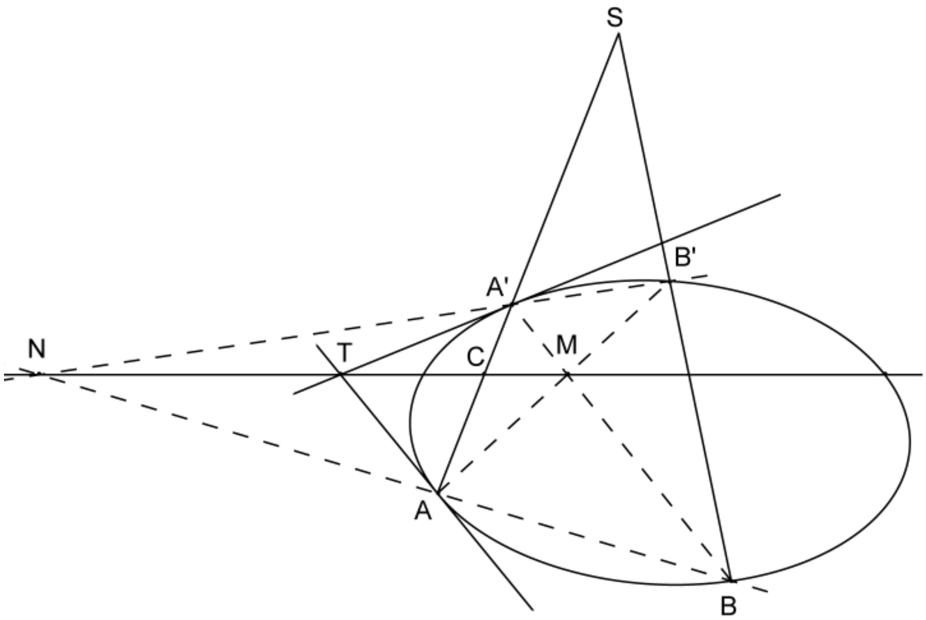
7.1 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA POLAR DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CÓNICA

Cuando varias cuerdas de una cónica pasan por un mismo punto S:

(i) Los puntos de encuentro de las rectas que unen dos a dos los extremos de dos cuerdas cualesquiera están sobre una misma recta.

(ii) Las tangentes a los extremos de cada cuerda se cortan sobre esta recta.

(iii) Esta recta es el lugar de los puntos conjugados armónicos del punto de encuentro de las cuerdas con respecto a los extremos de cada cuerda y recibe el nombre de recta polar del punto S respecto de la cónica.



Sean AA', BB' dos cuerdas y S su punto de encuentro. Probemos primero que los puntos M, N intersección de las rectas que unen los extremos de estas dos cuerdas y el punto T de encuentro de las tangentes por los extremos A, A', de una de las cuerdas, son tres puntos en línea recta.

Como son puntos y tangentes de la misma cónica, por el teorema [6.5], el haz de rectas AT, AB, AB', AA' tiene la misma razón doble que el haz A'A, A'B, A'B', A'T (al ser tangentes a la cónica, AT=AA y A'T=A'A'). Y por las propiedades [2.3] de la razón doble

$$(AA', AB', AB, AT) = (A'T, A'B', A'B, A'A) = (A'A, A'B, A'B', A'T)$$

de donde AA' coincide con A'A y por tanto, según el teorema [2.10], los puntos de encuentro de las rectas de los dos haces [AA', AB', AB, AT] y [A'A, A'B, A'B', A'T] M, N, T están en línea recta.

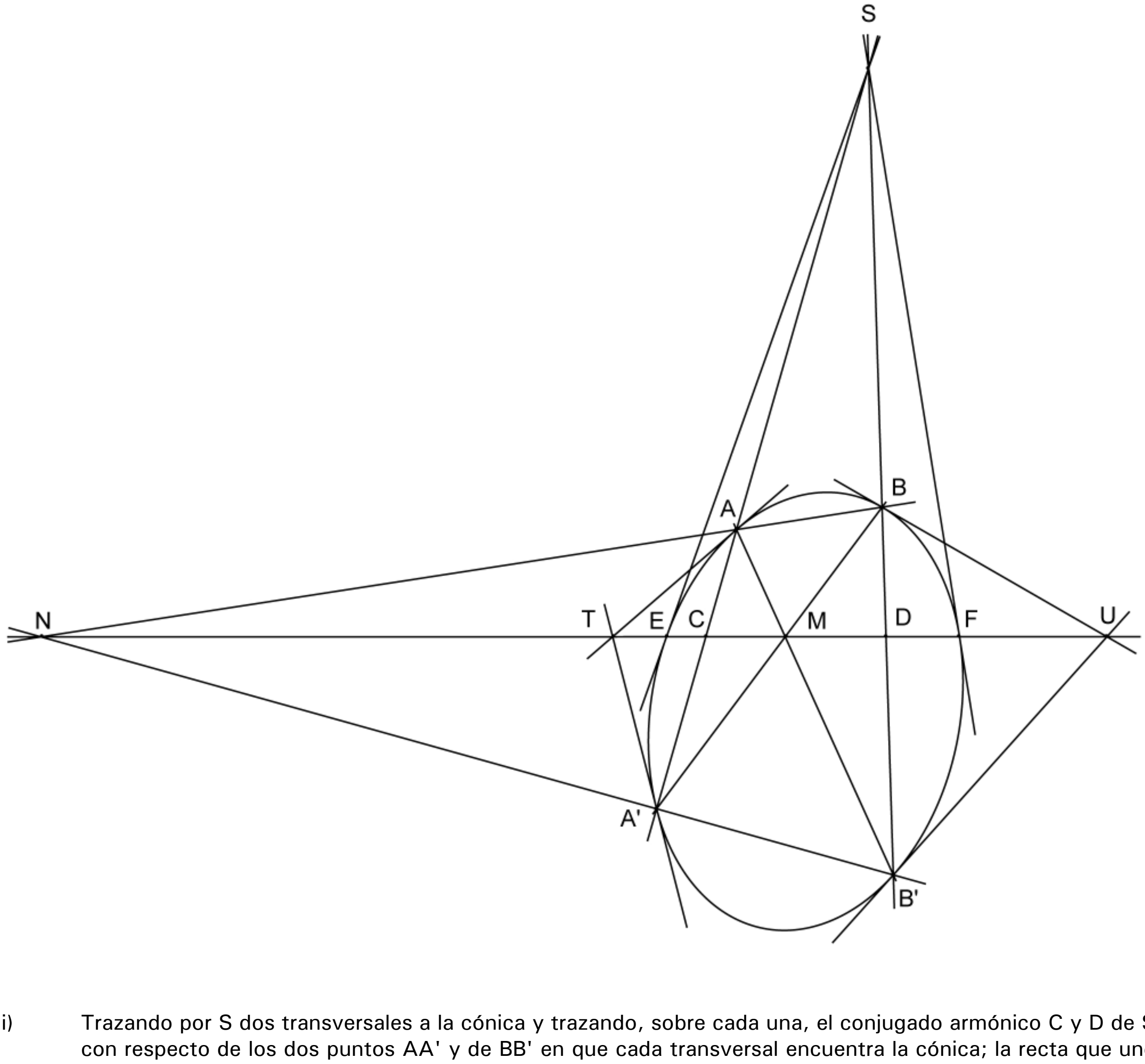
Teniendo ahora en cuenta el teorema [5.5] para el cuadrivértice AMA'N, la intersección C de las diagonales AA' y MN es el conjugado armónico con respecto a los vértices A y A' del punto S en el que la recta, que une los puntos de encuentro de los lados opuestos del cuadrilátero por B y B', encuentra a la diagonal por A y A'.

La recta MN se determina por medio de una sola cuerda AA', ya que pasa por T punto de encuentro de las tangentes por A y A'; y por C, conjugado armónico de S respecto a A y A'.

La recta MN es la **polar** del punto S y el punto, a su vez, **polo** de la recta.

Las rectas desde el polo a un punto de encuentro de la polar con la cónica es la tangente a la cónica en ese punto; si no fuera tangente, tendría otro punto diferente de encuentro con la cónica y el conjugado armónico de S respecto a estos dos puntos no sería el supuesto.

7.2 CONSTRUCCIÓN DE LA POLAR DE UN PUNTO
Visto lo precedente podemos establecer cinco maneras distintas para construir la recta polar de un punto respecto de una cónica dada:



(i) Trazando por S dos transversales a la cónica y trazando, sobre cada una, el conjugado armónico C y D de S con respecto de los dos puntos AA' y de BB' en que cada transversal encuentra la cónica; la recta que une los dos puntos C y D así determinados es la polar.

(ii) Trazando las tangentes por los puntos de intersección A, A', B, B' de cada transversal con la cónica; los puntos de encuentro T y U de cada par de tangentes están sobre la polar.

(iii) Uniendo dos a dos los puntos de encuentro A, A', B, B' de las transversales y la cónica por medio de rectas; los puntos de encuentro M y N de estas rectas están en la polar.

(iv) Con una sola transversal AA'; el conjugado armónico C del punto S con respecto a los puntos de encuentro de la transversal con la cónica y el de intersección T de las tangentes en dichos puntos determinan la polar.

(v) Trazando por S dos tangentes a la cónica; la recta que une los dos puntos de contacto E y F es la recta polar de S.

7.3 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DEL POLO DE UNA RECTA RESPECTO DE UNA CÓNICA

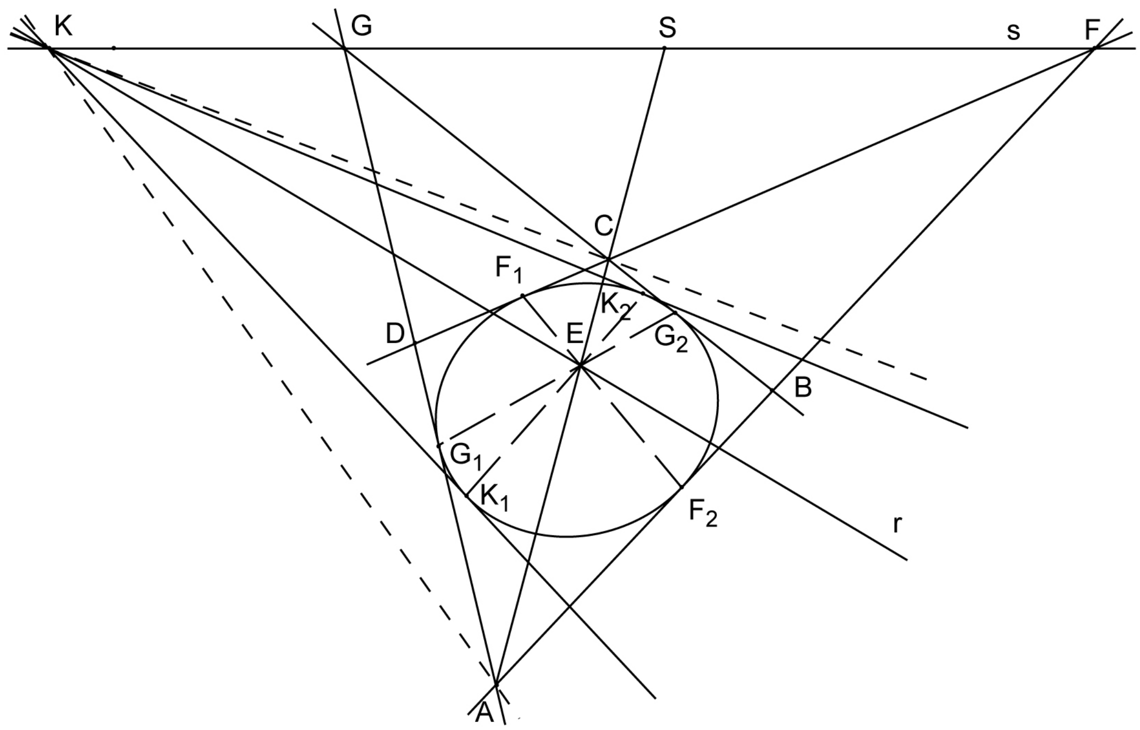
Si, por cada punto K de una recta s, se trazan dos tangentes a una cónica y si r es la conjugada armónica de s con respecto a las dos tangentes:

(i) Todas las rectas r pasan por un mismo punto E.

(ii) Las diagonales del cuadrivértice formado por las cuatro tangentes desde dos puntos F y G de la recta s pasan por el punto E.

(iii) Las cuerdas K_1K_2, G_1G_2, F_1F_2, ... que unen los puntos de contacto de las tangentes trazadas desde cada punto de la recta s pasan también por E.

(iv) El punto E es el **polo** de la recta s.



Sea ABCD el cuadrilátero formado por las tangentes a la cónica desde dos puntos F y G de una recta s. Si por K, otro punto de s, trazamos la recta r conjugada armónica de s respecto de las dos tangentes a la cónica trazadas desde K; r pasará por E el punto de encuentro de las diagonales de ABCD.

De acuerdo con [6.7], las dos tangentes desde K y las dos rectas desde ese punto K a los vértices opuestos A y C del cuadrilátero definen una involución en la que la recta r = KE es doble (ver [5.13]). En consecuencia, si S es el punto de encuentro entre AC y FG, la recta KE y la otra recta doble KS = s = KF = FG son conjugadas armónicas con respecto a las dos rectas KA, KC [5.14]. Pero, las tangentes desde el punto K a la cónica pertenecen a la misma involución que las rectas KA y KC [6.7]; entonces, la recta KE y la recta KF son conjugadas armónicas respecto a las dos tangentes a la cónica KK_1 y KK_2 [5.14]. Esto prueba (i).

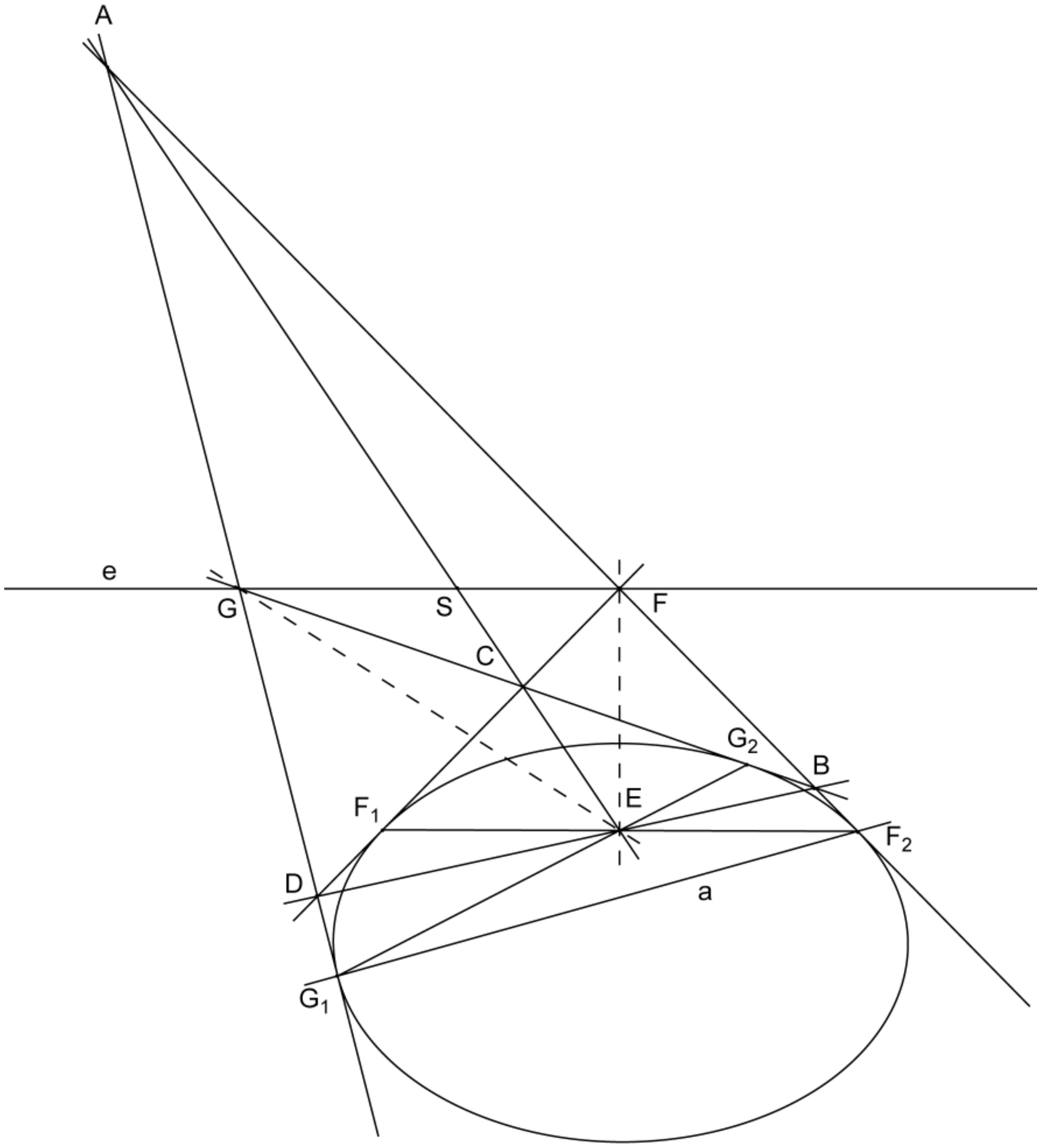
Como el punto E, por el cual pasan todas las rectas r, es punto de encuentro de las diagonales del cuadrilátero formado por las tangentes por dos puntos arbitrarios de s; hemos probado (ii). Además hemos probado que en el cuadrilátero circunscrito, las rectas que unen los puntos de contacto de los lados opuestos pasan por el punto de encuentro de dos diagonales.

(iii) es consecuencia de (ii); ya que si F y G llegan a confundirse, una de las diagonales del cuadrilátero se convierte en la cuerda de contacto de sus dos lados por el punto G.

De acuerdo con [7.2] apartado (v), s es la polar de E porque las tangentes a la cónica por los extremos de las cuerdas por E se encuentran en F, G, K ... sobre la recta s. Cuando la recta s corta a la cónica en dos puntos, el polo de la recta es el punto de encuentro de las tangentes por esos puntos.

7.4 CONSTRUCCIÓN DEL POLO DE UNA RECTA

Visto lo precedente podemos establecer cinco maneras distintas de construir el polo de una recta respecto de una cónica dada:



(i) Si Trazamos, por dos puntos F y G de una recta e, las tangentes a la cónica FF_1, FF_2, GG_1 y GG_2, las rectas FE y GE conjugadas armónicas de e, con respecto a cada par de tangentes, se encuentran en el polo buscado; el punto E.

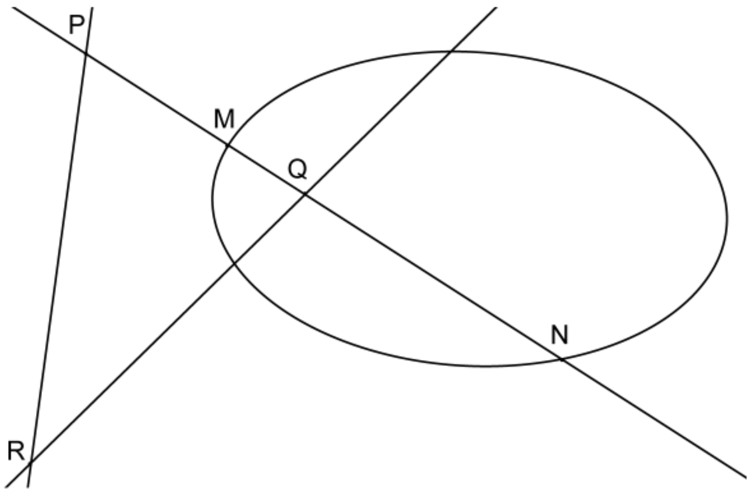
(ii) El punto de encuentro E de las dos diagonales AC y BD del cuadrilátero ABCD formado por las cuatro tangentes FF_1, FF_2, GG_1 y GG_2 es el polo buscado.

(iii) El punto de encuentro E de las dos cuerdas de contacto F_1F_2 y G_1G_2 de los dos pares de tangentes FF_1, FF_2, GG_1 y GG_2 es el polo buscado.

(iv) Se trazan desde un solo punto F de la recta e las dos tangentes FF_1 y FF_2 a la curva y la recta FE conjugada armónica de e respecto de estas tangentes. Esta conjugada armónica encuentra a la cuerda F_1F_2 que une los puntos de contacto en el polo E.

(v) Por último, si por G_1 y F_2, los puntos de encuentro de una recta a con lacónica, trazamos las tangentes, éstas se encuentran en el polo A de dicha recta.

7.5 TEOREMA SOBRE PROPIEDADES DE POLOS Y POLARES
Si la polar de un punto P respecto de una cónica pasa por un punto Q, la polar de Q pasa por P.



PQ corta a la cónica en M y N. Entonces, como PMN corta a la polar de P en Q, [PQ,MN] es una cuaterna armónica [7.1] (iii). Por lo tanto, P ha de estar sobre la polar de Q.

Inferimos que las polares respecto a una cónica, de cada punto de una recta, pasan por un mismo punto que no es otro que el polo de dicha recta.

Si las polares de dos puntos P y Q se cortan en el punto R, entonces R está en la polar de P y P está en la polar de R. Del mismo modo Q está en la polar de R. Deducimos que PQ es la polar de R.

Concluimos que la recta que une dos puntos cualesquiera es la polar del punto de intersección de las polares de los puntos; o lo que es lo mismo, el punto de intersección de dos rectas cualesquiera es el polo de la recta que une los polos de las dos rectas.

8. PUNTOS CONJUGADOS Y RECTAS CONJUGADAS RESPECTO DE UNA CÓNICA

8.1 DEFINICIÓN DE PUNTOS Y RECTAS CONJUGADOS

Dos puntos se llaman **puntos conjugados** respecto de una cónica, cuando la polar de uno pasa por el otro.

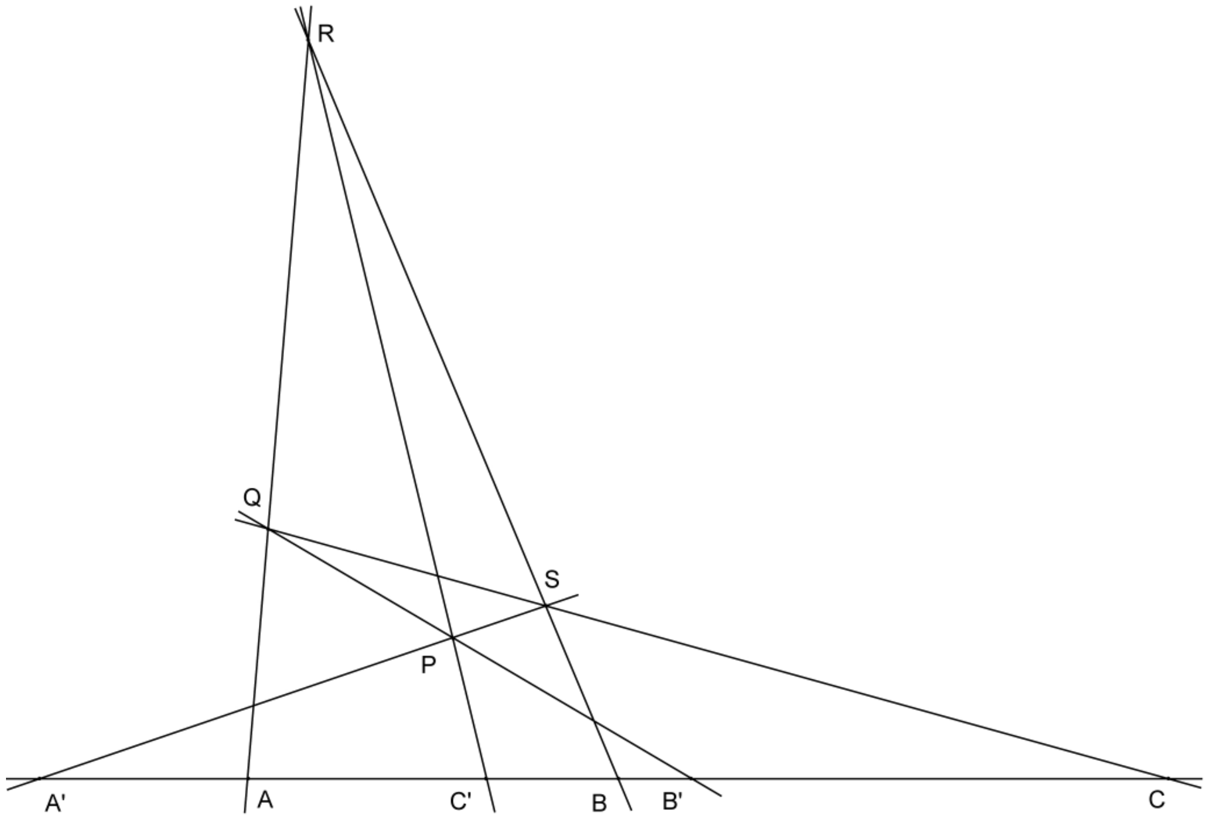
Dos rectas se llaman **rectas conjugadas** respecto de una cónica, cuando el polo de la una está sobre la otra.

Por el teorema [7.5] las polares de un par de puntos conjugados son rectas conjugadas; y los polos de un par de rectas conjugadas son puntos conjugados.

Es fácil deducir que, en general, sólo un punto de una recta dada es conjugado de otro punto dado; el punto donde la recta dada corta a la polar del punto dado. Igualmente, por un punto dado sólo podemos trazar una recta conjugada con una recta dada, excepto que el punto dado sea el polo de la recta dada.

8.2 TEOREMA DE HESSE SOBRE PARES DE VÉRTICES CONJUGADOS EN UN CUADRIVÉRTICE

Si cada par de extremos de dos diagonales de un cuadrivértice son conjugados respecto a una cónica dada, los extremos de la tercera diagonal también son conjugados respecto a la misma cónica.



Sea el cuadrivértice ABSQ tal que A es el conjugado de S y B el de Q, respecto de una cónica dada. Los lados AB y QS se encuentran en C y los lados AQ y BS en R; entonces C y R serán conjugados respecto esa cónica.

Si las polares de los puntos A, B, C cortan a la recta ABC en A', B', C' respectivamente; si consideramos el cuadrivértice PQRS vemos que cada punto y su conjugado están sobre lados opuesto de este cuadrivértice, según el teorema de Desargues [5.6], los tres pares de puntos conjugados A y A', B y B', C y C' están en involución. En consecuencia, si consideramos QRS como el triángulo cortado por la transversal A'B'C', de acuerdo con el teorema recíproco de Desargues [5.6], las rectas SA', QB', RC' concurren en un punto P.

Por ser A y S conjugados, SA' es la polar de A y por ser B y Q conjugados, QB' es la polar de B; entonces su punto de intersección P es el polo de AB.

Ya que C está sobre AB y es conjugado con C', su polar es PC'; pero PC' pasa por R, entonces C y R son puntos conjugados.

8.3 DEFINICIÓN DE TRIÁNGULOS CONJUGADOS RESPECTO DE UNA CÓNICA

El triángulo formado por las polares respecto a una cónica de los vértices de un triángulo dado se denomina **triángulo conjugado** de ese triángulo dado.

Si ABC es el triángulo dado y A'B'C' el triángulo conjugado, de forma que B'C', C'A', A'B' son las polares A, B, C respectivamente, entonces A', B', C' son las polares de BC, CA, AB, respectivamente. Por tanto el triángulo ABC es el triángulo conjugado de A'B'C'.

En el caso de que un triángulo coincida con su conjugado, es decir cuando cada vértice es polo del lado opuesto, el triángulo recibe el nombre de **autoconjugado**.

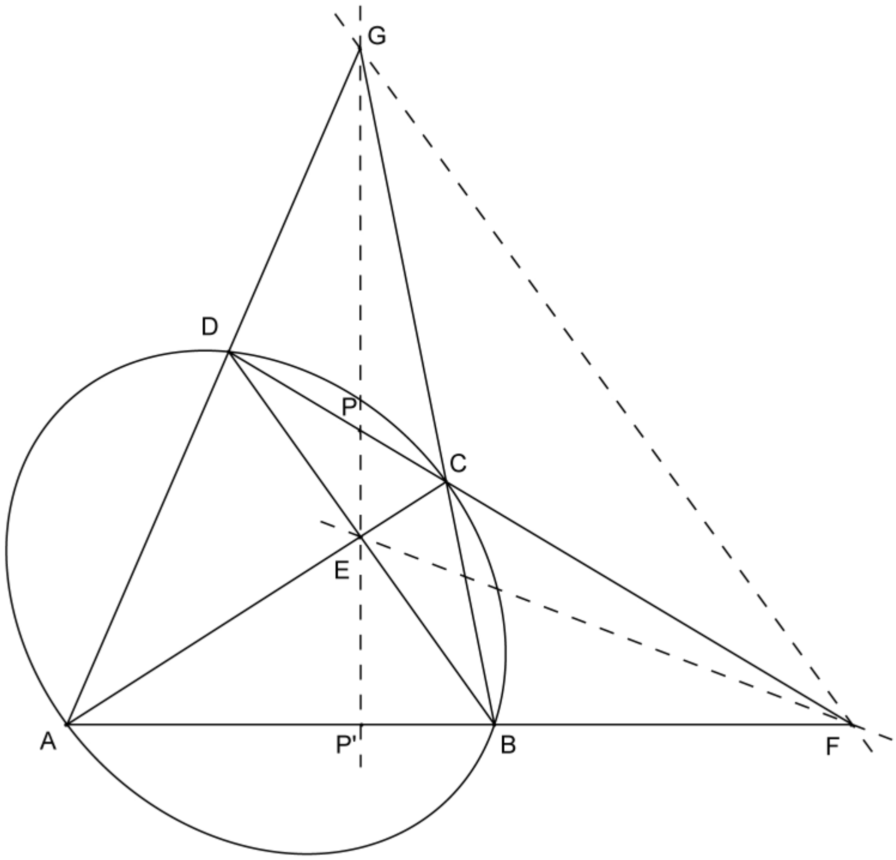
8.4 CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO AUTOCONJUGADO RESPECTO DE UNA CÓNICA

Dado un punto A, siempre podemos construir un triángulo que tenga por vértice a A que sea autoconjugado respecto de una cónica dada. Si tomamos un punto cualquiera B sobre la polar de A y tomamos como punto C el punto de intersección de la polar de B con la polar de A; entonces el triángulo ABC es autoconjugado respecto de la cónica.

De acuerdo con [7.5], ya que B está en la polar de A, la polar de B pasa por A. De lo anterior, AC es la polar de B. Además, C ha de ser el polo de AB.

8.5 TEOREMA SOBRE UN TRIÁNGULO DIAGONAL COMO TRIÁNGULO AUTOCONJUGADO

Los puntos diagonales de cualquier cuadri vértice inscrito en una cónica son los vértices de un triángulo autoconjugado.



Sea ABCD un cuadrivértice cualquiera inscrito en una cónica y sean E, F, G sus puntos diagonales.

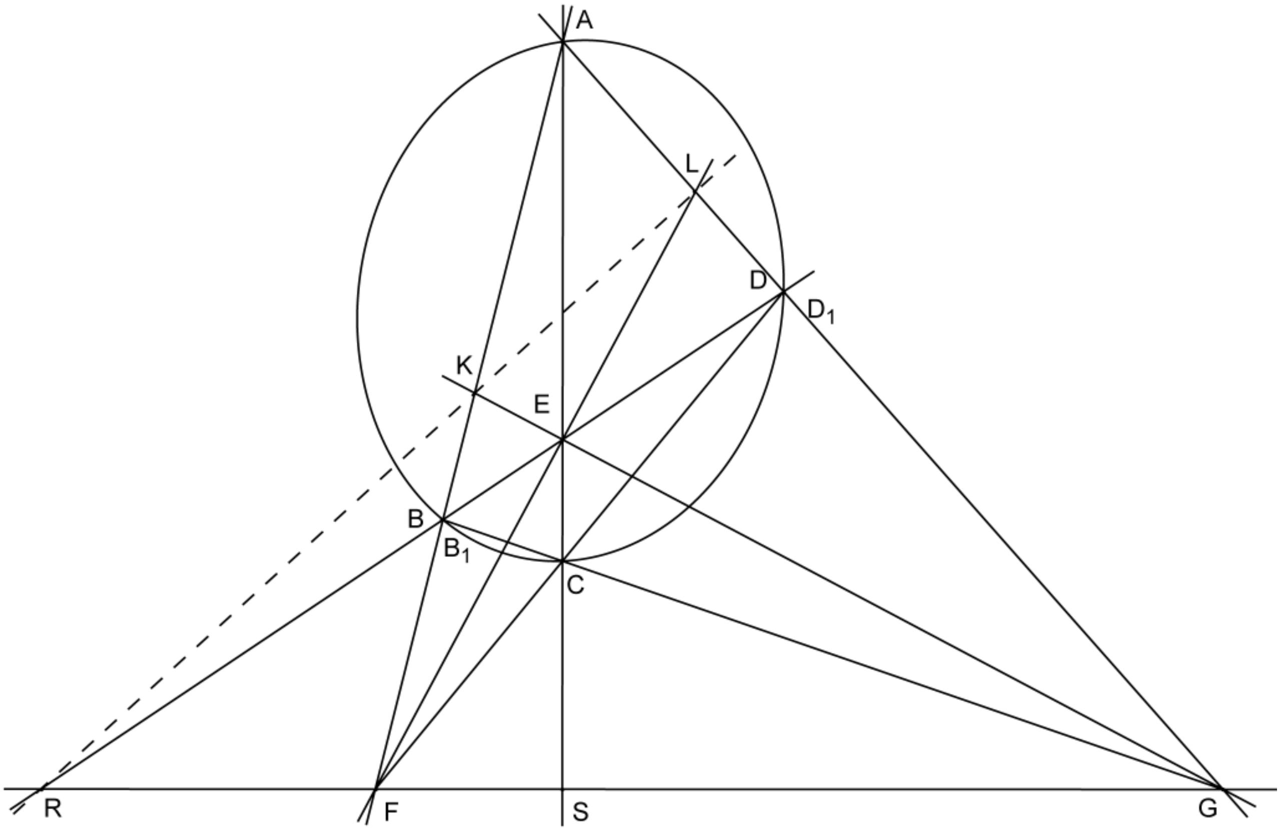
Combinando [5.5] y [3.5], si CD, AB cortan a GE en P y P', las cuaternas [CD,PF] y [AB,P'F] son armónicas.

Entonces GE contiene dos puntos P y P' conjugados armónicos de F respecto de la cónica y por lo tanto, la recta diagonal GE es la polar [7.1] (iii) del punto diagonal F.

De modo análogo, EF y FG son las polares de G y E respectivamente; y en consecuencia, EFG es un triángulo autoconjugado [8.3] respecto de la cónica.

8.6 TEOREMA SOBRE UN TRIÁNGULO AUTOCONJUGADO COMO TRIÁNGULO DIAGONAL

Si por el vértice E de un triángulo EFG, autoconjugado respecto a una cónica dada, se trazan dos rectas, que cortan a la cónica respectivamente en C, A y en B, D, de tal modo que el haz de rectas E[BC,FG] sea armónico, entonces F y G son los puntos diagonales restantes del cuadrivértice ABCD.



Primero constatamos que al ser dados E, F y G, una vez trazado el punto C sobre la cónica, los puntos A, B y D no pueden ser arbitrarios. Si fijamos C; A ha de ser la intersección de EC con la cónica; D la intersección de EB con la cónica; y EB la recta conjugada armónica de EC respecto de EF y EG por la condición del enunciado del teorema.

De acuerdo con [3.5], si EC corta a FG en S, EB debe ser tal que encuentre a FG en R el conjugado armónico de S respecto a F y G. Para hallar la recta ER, hallamos el punto R el conjugado armónico de S respecto a F y G utilizando la construcción [3.8] que se desprende del teorema [3.7].

Unimos F y G con A; FA corta a EG en K y GA corta a EF en L. KL corta a FG en R que es el conjugado armónico de S respecto de F y G [3.8].

ER es entonces la recta conjugada armónica de ES = EC respecto de EF y EG; esta recta ER corta a FA y GA respectivamente en B_1 y D_1 y a la cónica en B y D.

Demostraremos que el punto B_1 coincide con el punto B y que el punto D_1 coincide con el punto D.

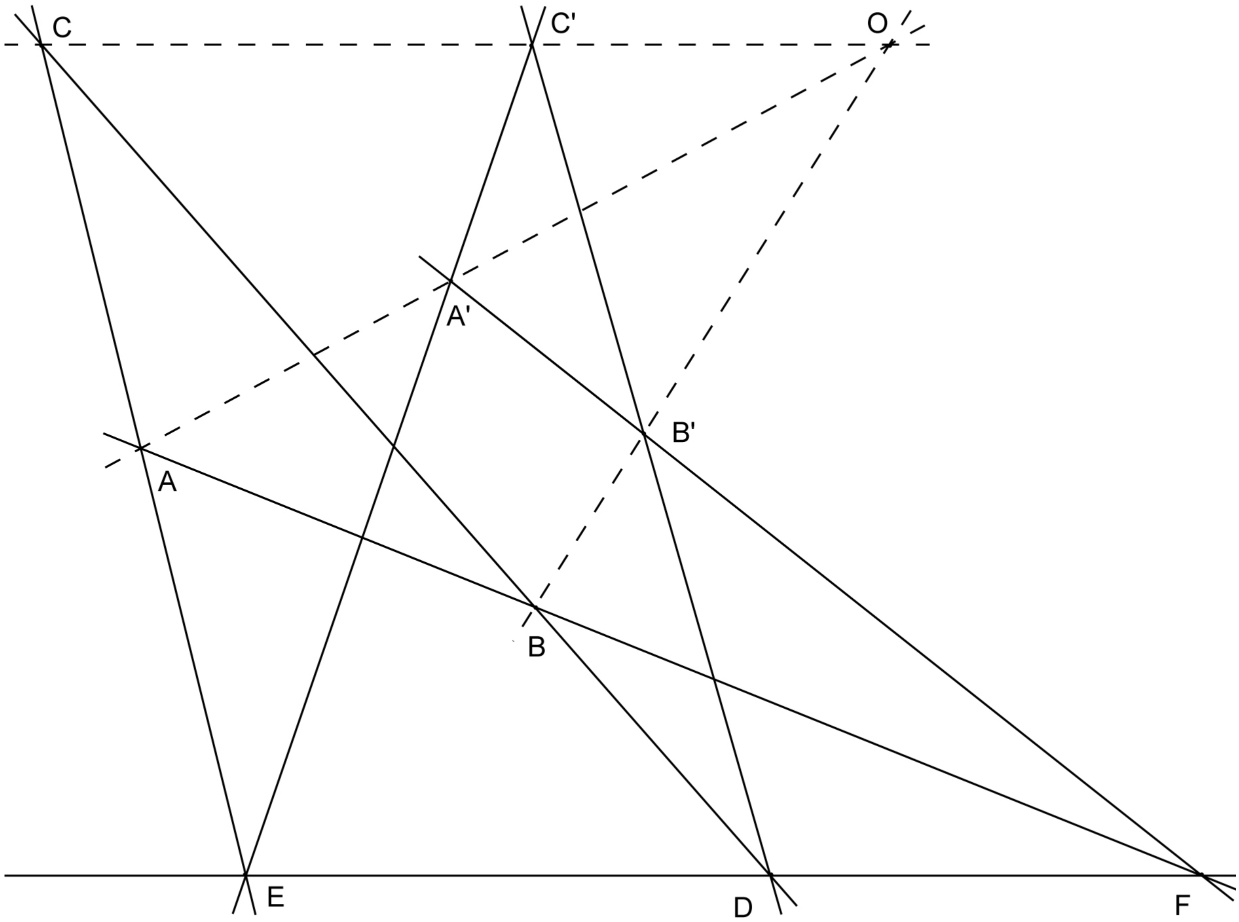
El haz armónico E[RS,FG] define la cuaterna armónica [B_1A,FK] [3.5]; pero K está en EG que es la polar de F respecto de la cónica, entonces K es el conjugado armónico de F respecto a A y B [7.1] (iii); y por tanto la cuaterna [BA,FK] es armónica y como el conjugado armónico es único [3.2], B_1 es B.

Por un razonamiento análogo se obtiene que D_1 es D; con lo que E está sobre BD.

Y por el teorema [3.7] para las cuaternas armónicas en rectas distintas y un punto común [RS,FG] y [RE,BD], BG = BC, FD y SE = AC también concurren y lo hacen en el conjugado armónico de A respecto de E y S, lo que significa que el conjugado armónico de A respecto a E y S es C.

Recopilando, podemos escribir que E es el punto de encuentro de los lados opuestos AC y BD, F el de CD y AB; y G el de BC y AD. Concluimos que E, F, G son los puntos diagonales del cuadrivértice inscrito en la cónica ABCD.

8.7 TEOREMA DE CHASLES SOBRE LA PERSPECTIVIDAD DE LOS TRIÁNGULOS CONJUGADOS
Cualquier triángulo y su conjugado respecto de una cónica dada están en perspectiva.



Llamamos E al punto de intersección de CA con C'A'.

Llamamos F al punto de intersección de AB con A'B'.

Si llamamos D al punto de intersección de BC con B'C', hay que demostrar que D está sobre EF [4.5].

Los puntos B y E son conjugados respecto a la cónica, ya que E se encuentra en C'A' que es la polar de B [8.3]; del mismo modo podemos asegurar que C y F también son conjugados.

Así, en el cuadrivértice ABDE que forman BC, CA, AB y EF, dos pares de vértices opuestos B y E, C y F son conjugados; entonces, por el teorema de Hesse [8.2], el tercer par también es conjugado, A y el punto D donde BC encuentra a EF.

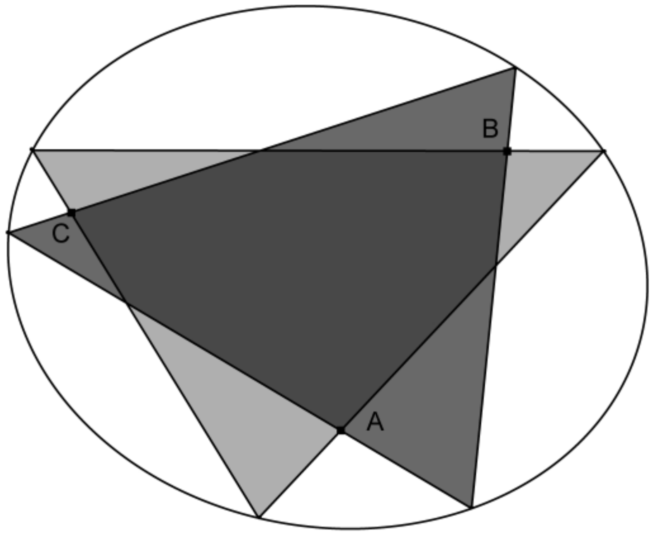
Entonces B'C' la polar de A ha de pasar por D [8.1]; así BC y B'C' se encuentran en un punto D sobre EF.

Ya que A es el polo de B'C' y A' el polo de BC, D es el polo de AA' [7.5]. Análogamente, E y F son los polos de BB' y CC' respectivamente.

Pero, AA', BB', CC' se encuentran en el centro de perspectiva de los dos triángulos [4.7] y D, E, F están en el eje de perspectiva. Entonces, el eje de perspectiva de cualquier triángulo y su conjugado es la polar [7.5] del centro de perspectiva de los triángulos.

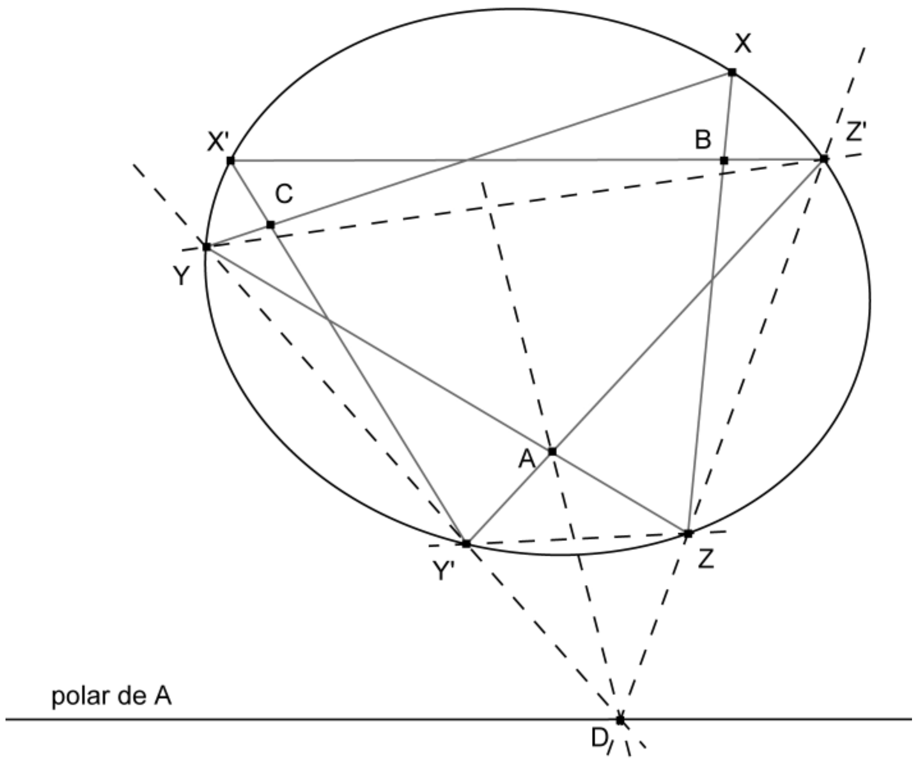
9. PROBLEMA DE CASTILLON POR CONJUGACIÓN

9.1 EL ENUNCIADO

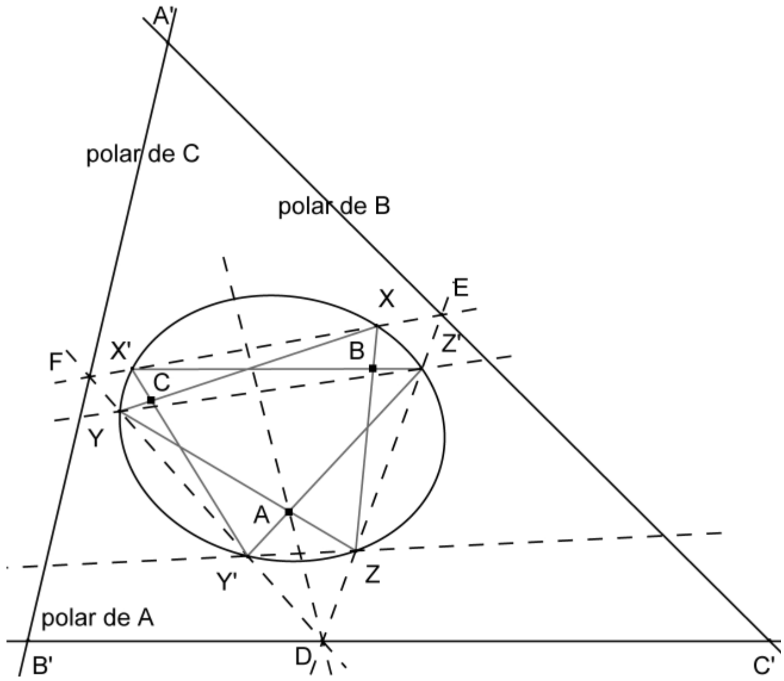


Mostrar como inscribir un triángulo en una cónica dada de tal modo que sus lados pasen respectivamente por tres puntos dados.

9.2 ANÁLISIS DE LA FIGURA



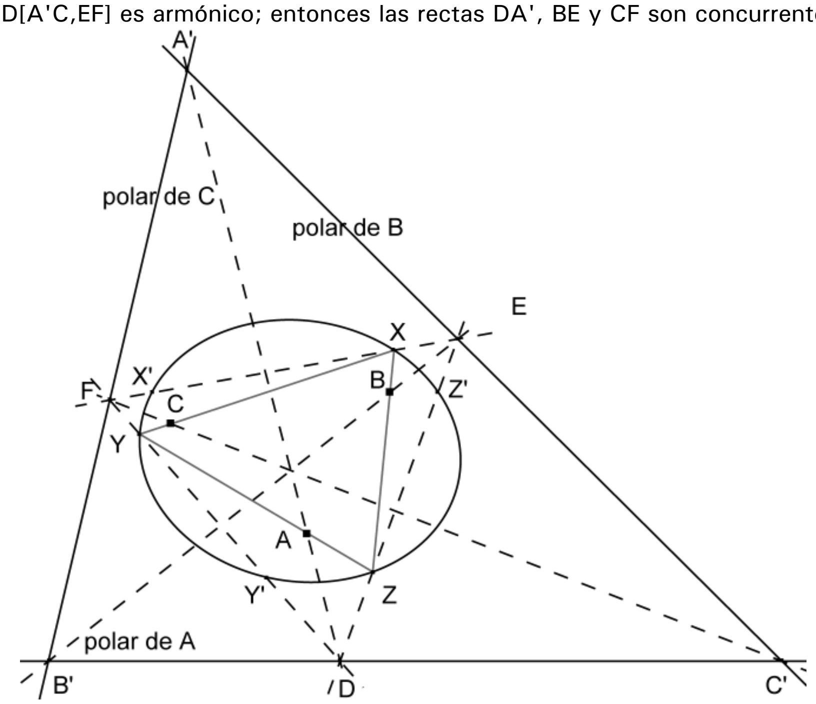
Suponemos el problema resuelto y que XYZ y X'Y'Z' son triángulos solución; entonces YZ, Y'Z' son cuerdas de la cónica que pasan por A; por lo tanto YY' y ZZ' se encuentran en un punto D sobre la polar de A [7.1].



Las cuerdas ZZ' y XX'se cortan en un punto E de la polar de B; y XX', YY' en un punto F de la polar de C.

En el cuadrivértice YY'ZZ', E está sobre ZZ' al igual que D y F está sobre YY' al igual que D; y como la polar de A también pasa por D, concluimos que D, E y F son tales que el haz de rectas D[C'A,EF] es armónico [5.4]. C' es un punto sobre la polar de A; en particular A', B', C' son los vértices del triángulo conjugado de ABC.

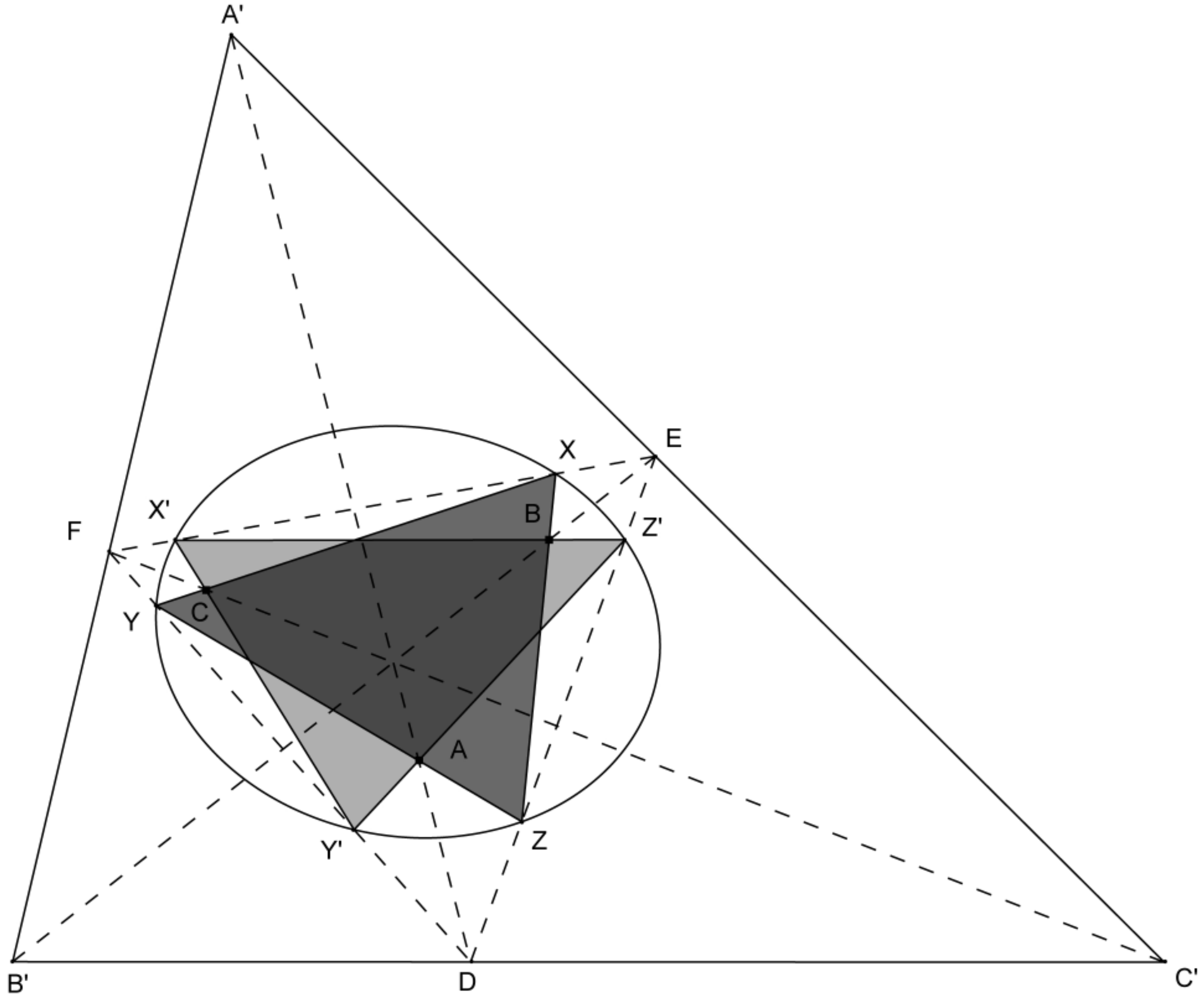
Pero por el teorema [4.2]; si D, E, F son tres puntos sobre cada uno de los lados de un triángulo A'B'C', de tal modo que el haz de rectas D[A'C,EF] es armónico; entonces las rectas DA', BE y CF son concurrentes.



Lo visto indica que DA' es una diagonal de YY'ZZ', lo que ocurre si DA' y DA coinciden. Para que DA' y DA coincidan, basta tomar D sobre AA'; entonces D es la intersección de AA' y la polar de A. Análogamente E es la intersección de BB' y la polar de B; y F es la intersección de CC' y la polar de C.

La concurrencia de DA, EB, CF exige la de AA', BB' CC'; pero esta concurrencia está garantizada por el teorema de Chasles [8.7] ya que ABC y A'B'C' son triángulos autoconjugados y, en consecuencia, están en perspectiva, lo que asegura la concurrencia de las rectas que unen sus vértices AA', BB', CC'.

9.3 EL MÉTODO QUE PROPORCIONA LA SOLUCIÓN POR CONJUGACIÓN



Dados los puntos A, B, C; trazamos A'B'C' triángulo conjugado del triángulo ABC respecto de la cónica dada.

Las rectas AA', BB' y CC' cortan a los lados del triángulo conjugado B'C', C' A' y A'B' en los puntos D, E y F respectivamente.

Las rectas EF, FD y DE cortan respectivamente a la cónica en los puntos X, X'; Y, Y' y Z, Z'; lo que en general proporciona **dos soluciones** al problema.

Hemos determinado dos triángulos XYZ, X'Y'Z que satisfacen las condiciones del enunciado 9.1.

9.4 COMPROBACIÓN DEL MÉTODO

Ya que por el teorema de Chasles [8.7], los triángulos ABC y A'B'C'son perspectivos, las rectas que unen los vértices correspondientes AA', BB' y CC' son concurrentes.

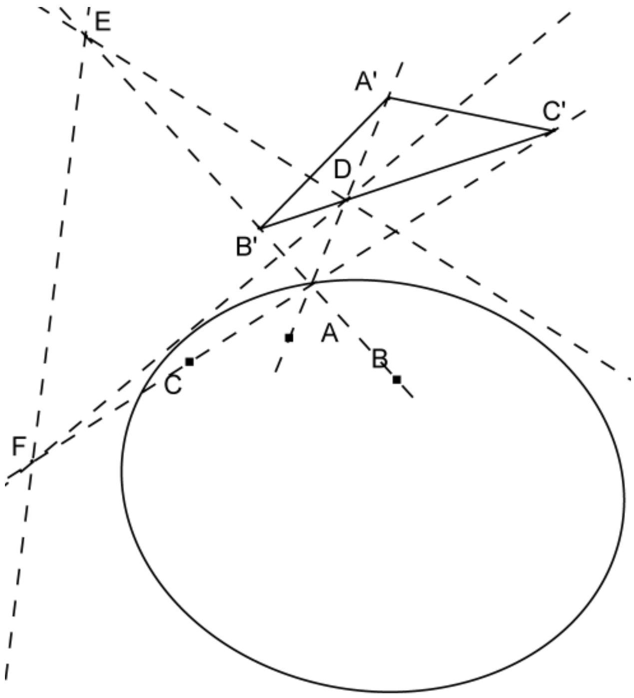
Las rectas concurrentes AA', BB' y CC' cortan los lados B'C', C'A' y A'B' respectivamente en E, D y F. Si aplicamos el resultado del teorema [4.2]; el haz D[C'A',EF] es armónico.

El haz armónico D[C'A',EF] puede escribirse como D[GA,Y'Z], siendo G el vértice (sobre la polar de A y que no está representado en la figura) que completa el triángulo autoconjugado DAG. DY' vuelve a encontrar a la cónica en Y, DZ vuelve a encontrar a la cónica en Z'; entonces por el teorema [8.6], el punto A (junto con D y G) es un punto diagonal del cuadrivértice YY'ZZ' y por lo tanto los lado YZ, Y'Z' de los triángulo solución pasan por A.

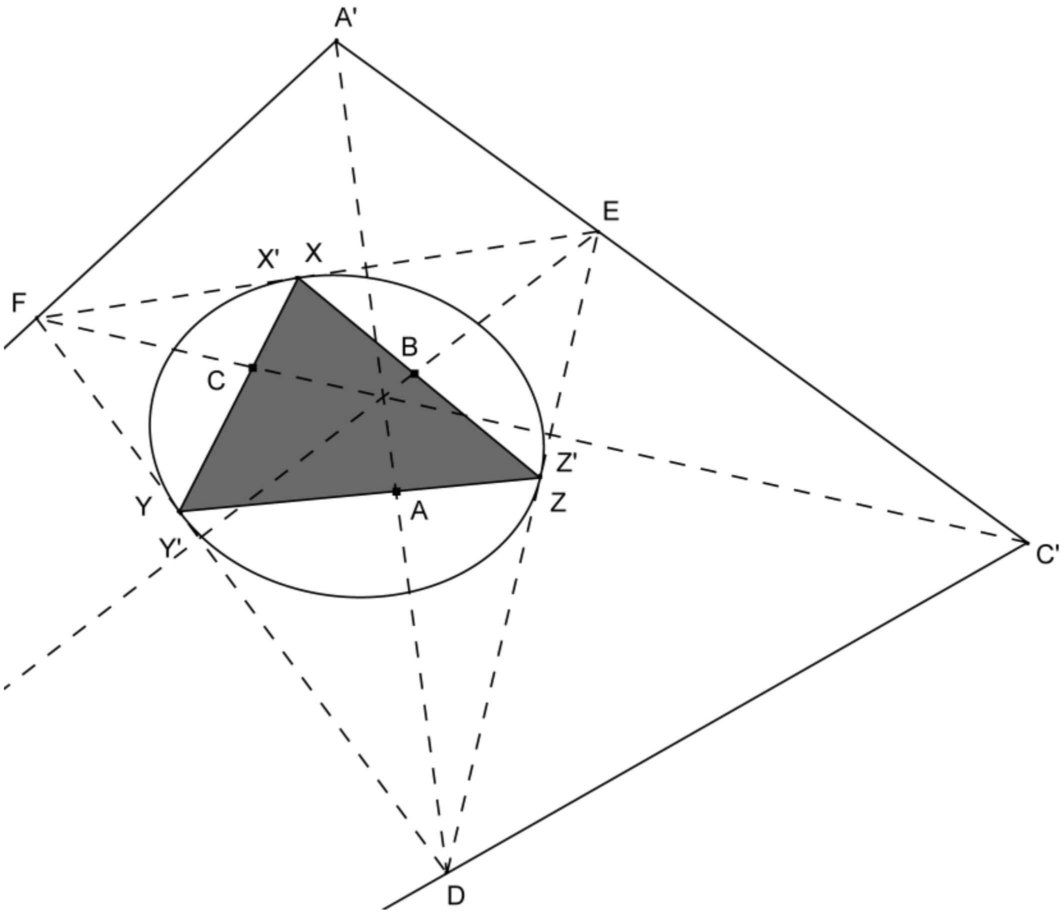
Análogamente podemos establecer que los lados Z X y Z'X' pasan por B y que XY, X'Y' pasan por C.

9.5 REVISIÓN GRÁFICA DEL NÚMERO DE SOLUCIONES

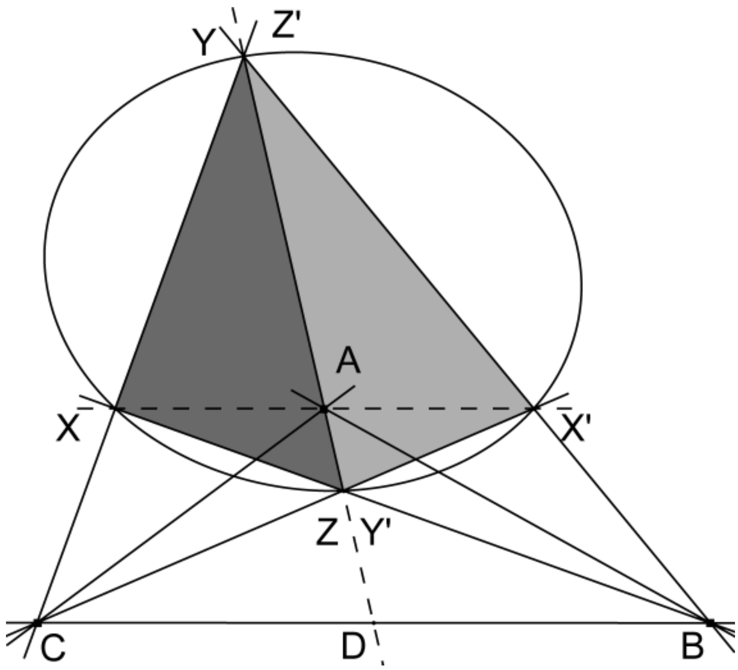
El problema, hemos visto, tiene generalmente dos soluciones [9.3].



De entrada, debemos decir que el método no es aplicable cuando A, B y C están alineados ya que las polares de los tres puntos se encontrarían simultáneamente en un mismo punto, el polo de la recta que los contiene. Es claro que cuando alguna de las rectas DE, EF, FD no corta a la cónica, el problema **no tiene solución**.



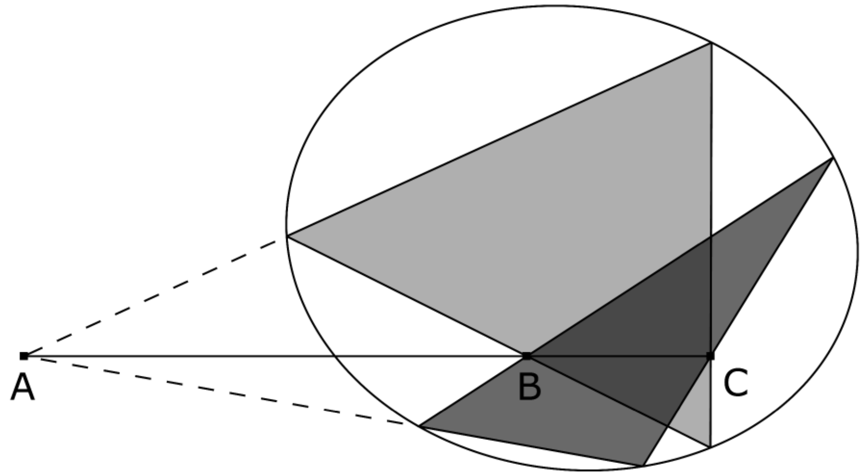
También es claro que cuando las rectas DE, EF, FD son tangentes a la cónica, el problema tiene **solución única**.



Si ABC es autoconjugado respecto de la cónica, cualquier punto D sobre BC nos proporciona una diagonal AD de un cuadrivértice cuyo triángulo diagonal es el propio ABC [8.6]. Por lo tanto, en general, para cualquier punto D sobre BC existe siempre una solución de dos triángulos, donde los cuadrivértices XX'YY' y ZZ'XX' coinciden y tienen en común la diagonal AD = ZZ' = YY' = YZ' = Y'Z. El cuadrivértice YY'ZZ' es degenerado y se reduce a una cuerda de la cónica. El problema posee **infinitas soluciones**.

10. EXCEPCIÓN AL MÉTODO POR CONJUGACIÓN CUANDO LOS PUNTOS DADOS ESTÁN ALINEADOS

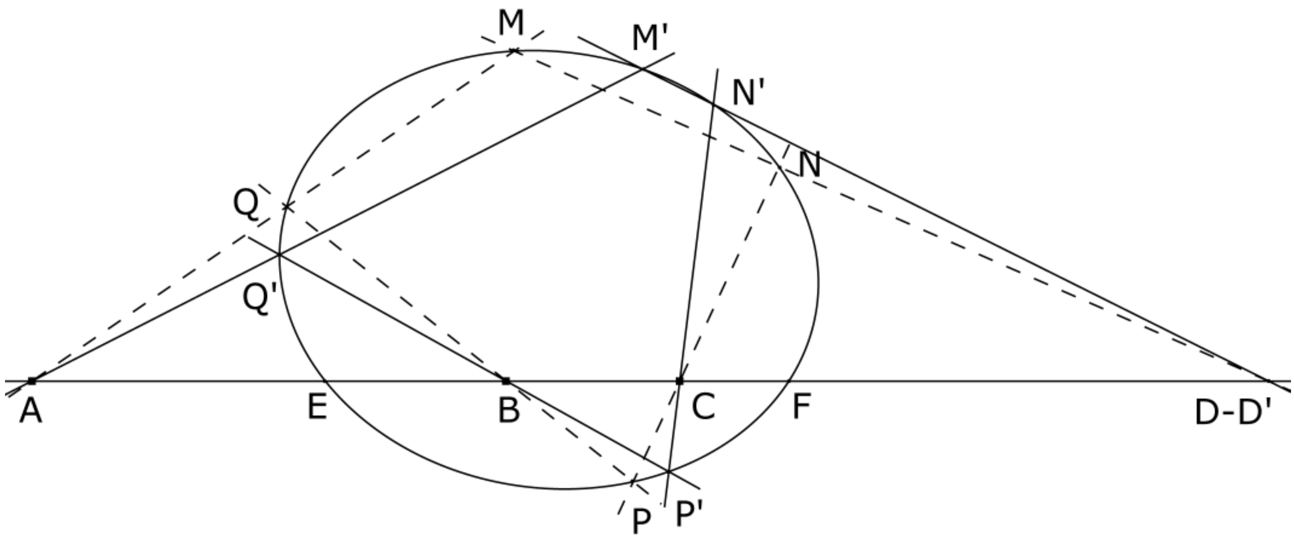
10.1 EL ENUNCIADO DE LA EXCEPCIÓN



Mostrar como inscribir un triángulo en una cónica dada de tal modo que sus lados pasen respectivamente por tres puntos dados que están alineados.

10.2 COROLARIO AL TEOREMA DE DESARGUES PARA EL CUADRIVÉRTICE INSCRITO EN UNA CÓNICA

Cuando dos cuadrivértices están inscritos en una misma cónica, si tres lados del primer cuadrivértice encuentran respectivamente a tres lados del segundo en tres puntos situados en línea recta: el punto de encuentro de los cuartos lados está situado sobre la misma recta.



Sean MNPQ y M'N'P'Q' el primer y segundo cuadrivértice respectivamente y sean A el punto de encuentro de los lados Q M y Q'M', B el de PQ y P MQ M, C de NP y N'P'.

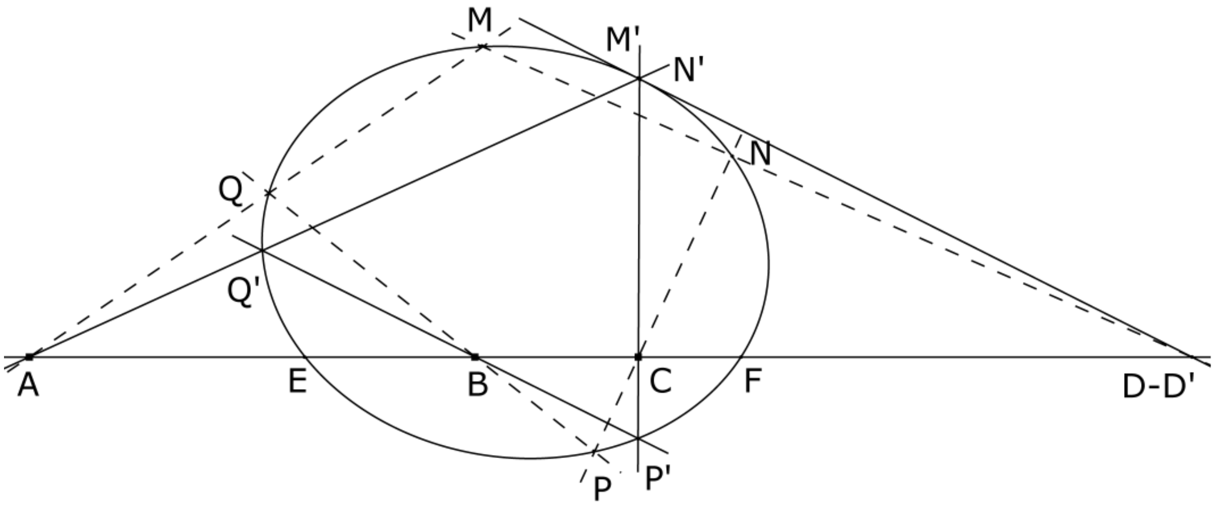
Si A, B y C están en una misma línea recta, podemos considerar dicha recta como una transversal a los cuadriláteros que corta a la cónica en los puntos E y F.

Si D es el punto de encuentro del lado MN con ABC, por el teorema de Desargues [6.6] aplicado al primer cuadrivértice inscrito en la cónica, D será el conjugado de B en la involución de la recta definida por los pares conjugados E, F y A,C.

Si D' es el punto de encuentro del lado M'N' con ABC, por el teorema de Desargues [6.6] aplicado al segundo cuadrivértice, D' será el conjugado de B en la involución de la recta definida por los pares conjugados E, F y A,C.

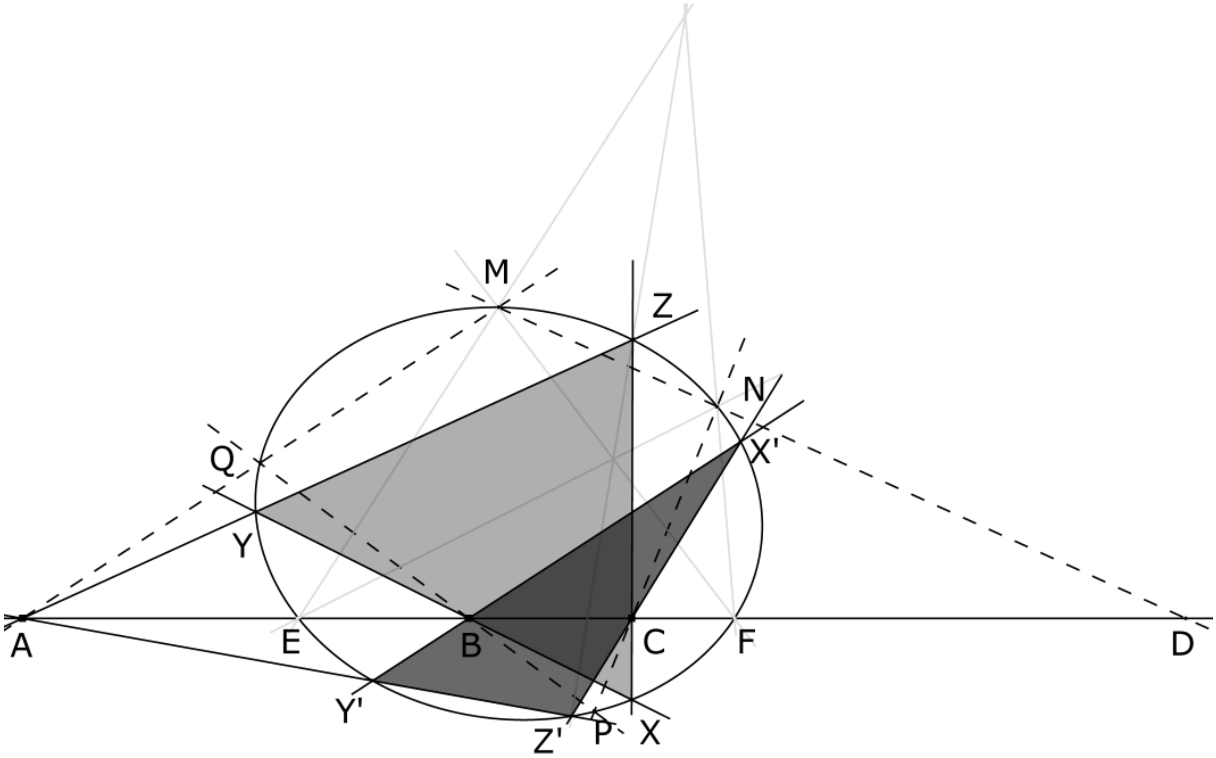
Pero como el conjugado en la involución es único [5.2], D coincide con D' y el corolario queda demostrado.

10.3 EL COROLARIO 10.2 CUANDO UNO DE LOS CUADRIVÉRTICES SE REDUCE A UN TRIÁNGULO



Si M' y N' coinciden, el lado M'N' es la tangente a la cónica desde el punto D, El segundo cuadrivértice será esa tangente y un triángulo inscrito a la cónica con un vértice en el punto de contacto entre la tangente y la cónica. Los tres lados del triángulo (los tres lados del cuadrivértice distintos de la tangente), pasan por los puntos A, B, C [10.2]. Todo ello nos proporciona un método para resolver el problema cuando los puntos A, B, C están alineados [9.5].

10.4 MÉTODO PARA LA EXCEPCIÓN DEL MÉTODO DE CONJUGACIÓN PARA PUNTOS DADOS EN LÍNEA RECTA



Por M, punto arbitrio de la cónica, trazamos la recta MA que corta a la cónica en el punto Q. Se traza la recta QB que corta a la cónica en el punto P por el que dibujamos la recta PC que corta a la cónica en N. Unimos MN que encuentra a la recta ABC en D. Tenemos un cuadrivértice inscrito en la cónica con tres lados que pasan por los puntos dados.

Por el punto D trazamos las tangentes a la cónica o de forma más precisa los puntos de contacto Z y Z' de esas tangentes y como son posibles hasta dos tangentes obtendremos, en general, dos soluciones (Con [7.2] hallamos los puntos de contacto como los puntos de intersección de la polar del punto D y la cónica [7.1]).

La recta ZA corta a la cónica en Y y ZC en X; la recta YX pasa por el punto B [10.3]. La recta Z'A corta a la cónica en Y 'y Z'C en X'; la recta Y'X' pasa por el punto B [10.3]. Hemos determinado dos triángulos XYZ, X'Y'Z que satisfacen las condiciones del enunciado excepción [10.1]