REFINAMIENTOS DE LA DESIGUALDAD DE FINSLER-HADWIGER

Vicente Vicario García

Con motivo del problema 500 de la revista digital *triánguloscabri*

ÍNDICE

1.- Introducción

Este humilde trabajo tiene su génesis e inspiración en el de D. Francisco Javier García Capitán que se publicó en esta revista con motivo del problema 400 de triánguloscabri y titulado "*La desigualdad de Weitzenböck*". En él se analizaba esta famosa desigualdad y se proponían múltiples demostraciones alternativas de la misma. También se establecía una cadena de desigualdades que conducía, al final de la misma, a la desigualdad de Weitzenböck. Finalmente, se refinaba esta desigualdad con la también famosa desigualdad de Finsler-Hadwiger, más general y precisa que la anterior.

Este artículo es en cierta medida una continuación natural del de García Capitán sobre la desigualdad de Weitzenböck, pero ahora proponemos el análisis y la reflexión de posibles refinamientos de la desigualdad de Finsler-Hadwiger, a la que denominaremos por brevedad desigualdad FH.

2.- Las desigualdades de Weitzenböck y Finsler-Hadwiger

En este apartado recordaremos el contenido de estas dos famosas desigualdades dando dos demostraciones alternativas de cada una de ellas. Esto constituirá el punto de arranque de nuestro trabajo.

La primera desigualdad fue publicada por R. Weitzenböck en 1919 [1], pero también apareció como problema de olimpiadas matemáticas en 1961. La desigualdad establece que si a, b, c son los lados de un triángulo y Δ su área, se tiene que

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta$$

con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero. Damos aquí dos demostraciones sencillas de la misma, de entre la gran variedad y posibilidad de demostraciones existentes.

Demostración 1: Empleando el teorema de los cosenos, una expresión para el área del triángulo y la fórmula del coseno de una suma de dos ángulos, tenemos que

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\cdot\Delta = a^2+b^2+(a^2+b^2-2ab\cos C)-2\sqrt{3}\cdot ab\,sen C = \\ &= 2(a-b)^2+4ab\big(1-\cos(C-\pi/3)\big)\geq 0\end{aligned}$$

dándose la igualdad si y sólo si $a=b$ y $C=\pi/3$, es decir, si y sólo si el triángulo es equilátero.■

Demostración 2: Utilizaremos las famosas sustituciones de Ravi $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, para $x,y,z>0$. La desigualdad de Weitzenböck, teniendo en cuenta la fórmula de Herón, es equivalente a

$$\big((y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\big)^2 \geq 48(x+y+z)xyz$$

que podemos obtener de la siguiente manera

$$\left((y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2\right)^2 \geq 16(yz+zx+xy)^2 \geq 16\cdot 3(xy\cdot yz+yz\cdot zx+xy\cdot yz)$$

donde usamos las desigualdades $p^2+q^2 \geq 2pq$ y $(p+q+r)^2 \geq 3(pq+qr+rp)$.■

Se puede demostrar también que en todo triángulo *ABC* la siguiente cadena de desigualdades es válida

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab} \geq 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 18Rr \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta$$

lo que mejora notablemente la desigualdad de Weitzenböck.

En 1937, Finsler y Hadwiger [2] encontraron una versión más fuerte que la desigualdad de Weitzenböck. Establecieron que si *a*, *b*, *c* son los lados de un triángulo y Δ su área, se tiene la desigualdad

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

que podemos reescribir en la forma equivalente

$$2ab+2bc+2ca-(a^2+b^2+c^2) \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta$$

Demostración 1: Después de las sustituciones de Ravi $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, para $x,y,z>0$, llegamos a

$$xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

que se obtiene a partir de la identidad

$$(xy+yz+zx)^2-3xyz(x+y+z)=\frac{(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2}{2} \quad ■$$

Demostración 2: Existen varias formas alternativas de llegar a la siguiente identidad

$$\frac{2ab+2bc+2ca-(a^2+b^2+c^2)}{4\Delta}=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$$

y por la convexidad de la función $f(x)=\tan x$ en $(0,\pi/2)$, la desigualdad de Jensen permite afirmar que

$$\frac{2ab+2bc+2ca-(a^2+b^2+c^2)}{4\Delta} \geq 3\cdot\tan\left(\frac{A/2+B/2+C/2}{3}\right)=\sqrt{3} \quad ■$$

Por otra parte, es importante hacer notar que a partir de las identidades bien conocidas $\sum bc=s^2+4Rr+r^2$, y $\sum a^2=2(s^2-4Rr-r^2)$ es inmediato observar que la desigualdad de Finsler-Hadwiger es equivalente a la siguiente desigualdad

$$2ab+2bc+2ca-(a^2+b^2+c^2) \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot s \leq 4R+r$$

3.- Refinamientos de la desigualdad de Finsler-Hadwiger

En este apartado exponemos distintos refinamientos de la desigualdad FH. Algunos mantienen la forma original de esta desigualdad, pero otros no lo hacen. Dichos refinamientos introducen nuevas e importantes desigualdades en la geometría del triángulo.

3.1. Refinamientos de C. Lupu y C. Pohoata

Es importante indicar que C. Lupu [3] proporcionó una nueva demostración elemental de la desigualdad FH usando exclusivamente la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica y la siguiente desigualdad de Mitrinovic $s \le \frac{3\sqrt{3}}{2}R$, que se puede demostrar fácilmente, a partir del teorema de los senos generalizado

$$\frac{s}{R} = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = senA + senB + senC$$

y la desigualdad de Jensen aplicada a la función $f(x) = senx$ en $(0, \pi)$

$$senA + senB + senC \le 3 \cdot sen\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3 \cdot sen\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Veamos a continuación una importante desigualdad que necesitaremos más adelante. La desigualdad de Schur establece que para números reales positivos *x*, *y*, *z* y *t* un número real, tenemos la desigualdad siguiente

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-x)(y-z) + z^t(z-y)(z-x) \ge 0$$

El caso que vamos a considerar es tal que $t = 1$, con lo que la desigualdad anterior toma la forma siguiente

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

que podemos reescribir en la forma equivalente

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \ge (x+y+z)(xy+yz+zx)$$

y usando la identidad

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

llegamos fácilmente a la siguiente desigualdad

$$2(xy+yz+zx) - (x^2+y^2+z^2) \le \frac{9xyz}{x+y+z} \qquad [*]$$

Necesitamos ahora dar una nueva forma a la desigualdad de Schur mediante el siguiente lema.
Lema: *Para todos números reales positivos m, n, p tenemos la siguiente desigualdad*

$$\frac{mn}{p}+\frac{np}{m}+\frac{pm}{n}+\frac{9mnp}{mn+np+pm}\geq 2(m+n+p)$$

Demostración: Denotando por $x=1/m$, $y=1/n$, $z=1/p$, obtenemos la desigualdad equivalente

$$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}+\frac{9}{x+y+z}\geq\frac{2(xy+yz+zx)}{xyz}\Leftrightarrow$$
$$2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2)\leq\frac{9xyz}{x+y+z}$$

que ya sabemos que es cierta.

Pasemos a estudiar los dos refinamientos a la desigualdad FH propuestos por C. Lupu y C. Pohoata [4]. El primero es más elemental que el segundo y requiere una demostración más breve.

<u>Refinamiento 1</u>: *En todo triángulo ABC de lados a, b, c, área* Δ *y radios R y r de las circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente, se cumple la desigualdad*

$$a^2+b^2+c^2\geq 2\sqrt{3}\cdot\Delta+2r(4R+r)+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Demostración: podemos reescribir la desigualdad en la forma siguiente

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\geq 2\sqrt{3}\cdot\Delta+2r(4R+r)$$

y utilizando las identidades ya conocidas $ab+bc+ca=s^2+4Rr+r^2$, y $a^2+b^2+c^2=2(s^2-4Rr-r^2)$, la desigualdad es equivalente a esta otra

$$16Rr+4r^2\geq 2\sqrt{3}\cdot\Delta+2r(4R+r)\Leftrightarrow 4R+r\geq\sqrt{3}\cdot s$$

lo que demuestra la proposición.

<u>Refinamiento 2</u>: *En todo triángulo ABC de lados a, b, c, área* Δ *y radios R y r de las circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente, se cumple la desigualdad*

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\Delta\cdot\sqrt{3+\frac{4(R-2r)}{4R+r}}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

Demostración: Poniendo en el lema anterior $m=\frac{1}{2}(b+c-a)$, $n=\frac{1}{2}(c+a-b)$ y $p=\frac{1}{2}(a+b-c)$, tenemos que

$$\sum \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b-c)} + \frac{9(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{\sum (b+c-a)(c+a-b)} \geq 2(a+b+c)$$

donde el símbolo sumatorio corresponde a sumas cíclicas. Por otra parte, por la fórmula de Herón $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 8sr^2$, la desigualdad es equivalente a

$$\sum \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b-c)} + \frac{18sr}{4R+r} \geq 4s \Leftrightarrow \sum \frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)} + \frac{9sr}{4R+r} \geq 2s \Leftrightarrow$$
$$\sum (s-a)^2(s-b)^2 + \frac{9s^2r^3}{4R+r} \geq 2s^2r^2$$

y, teniendo en cuenta la identidad, de demostración inmediata

$$\sum (s-a)^2(s-b)^2 = \left(\sum (s-a)(s-b)\right)^2 - 2s^2r^2$$

tenemos entonces la desigualdad

$$\left(\sum (s-a)(s-b)\right)^2 - 2s^2r^2 + \frac{9s^2r^3}{4R+r} \geq 2s^2r^2$$

y puesto que $\sum (s-a)(s-b) = r(4R+r)$, tenemos las desigualdades equivalentes

$$r^2(4R+r)^2 + \frac{9s^2r^3}{4R+r} \geq 4s^2r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{4R+r}{s}\right)^2 + \frac{9r}{4R+r} \geq 4$$

Por otra parte, de las identidades ya mencionadas para $\sum bc$, y $\sum a^2$, se tiene fácilmente que

$$\frac{4R+r}{s} = \frac{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}{4\Delta}$$

y entonces, teniendo en cuenta que $R \geq 2r$ (desigualdad de Euler-Chapple), la desigualdad se reescribe finalmente en las formas

$$\left(\frac{2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)}{4\Delta}\right)^2 \geq 4 - \frac{9r}{4R+r} \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)-\left((a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2\right)}{4\Delta}\right)^2 \geq 3 + \frac{4(R-2r)}{4R+r} \Leftrightarrow$$
$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\Delta \cdot \sqrt{3+\frac{4(R-2r)}{4R+r}} + (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

lo que concluye la demostración.

3.2 Refinamiento de Bilchev y Vlamos

Otro de los refinamientos de la desigualdad de Finsler-Hadwiger tiene su origen en la desigualdad de Iskren Pushkarov que apareció en la revista búlgara *Mathematics and Informatics*, N2, 1999 [5], con la siguiente formulación y que a partir de aquí denominaremos desigualdad IPI.
Desigualdad IPI (I. Pushkarov):
"*Para todo triángulo ABC se tiene la desigualdad*: $\dfrac{a}{r_a + h_a} + \dfrac{b}{r_b + h_b} + \dfrac{c}{r_c + h_c} \geq \sqrt{3}$ ".

donde h_a y r_a son la altura relativa al lado *BC*, y el radio de la circunferencia exinscrita tangente al mismo lado del triángulo, respectivamente. Análogamente para los demás términos de la desigualdad.

Los autores A. Antonov y A. Simeonov [6] demostraron la desigualdad de Pushkarov reduciéndola previamente con la ayuda de expresiones bien conocidas. Teniendo en cuenta que $r_a = \dfrac{\Delta}{s-a}$ y $h_a = \dfrac{2\Delta}{a}$, (análogamente para los demás términos) y sustituyendo todos ellos, entonces es trivial ver que la desigualdad de Pushkarov es equivalente a la desigualdad

$$\frac{a^2(s-a)}{b+c} + \frac{b^2(s-b)}{c+a} + \frac{c^2(s-c)}{a+b} \geq \sqrt{3} \cdot \Delta$$

que denominaremos a partir de ahora desigualdad ASPI. Como indican Bilchev y Vlamos en su artículo [7], las desigualdades IPI o ASPI tienen interés científico en sí mismas porque mejoran otras desigualdades clásicas bien conocidas. Desgraciadamente, para la demostración de la desigualdad IPI, Antonov y Simeonov recurrieron a asistentes informáticos a lo largo del proceso, lo cual indica que es conveniente intentar simplificar la propia demostración y buscar caminos más fructíferos para comprender la propia desigualdad. Es aquí donde Bilchev y Vlamos proponen en su artículo "*About some improvements of the Finsler-Hadwiger´s inequality*" una demostración completa de la desigualdad IPI (ó ASPI) sin recurrir a asistentes informáticos, e incluso proponen generalizaciones a la desigualdad.

Antes de continuar pondremos en función de sumas cíclicas la desigualdad de Finsler-Hadwiger en la forma

$$2\sum bc - \sum a^2 = 2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \Delta$$

Bilchev y Vlamos demostraron que la desigualdad IPI (ó ASPI) es mejor que la desigualdad de Finsler-Hadwiger. Esto significa que

$$4\sqrt{3} \cdot \Delta \leq 4\sum \frac{a^2(s-a)}{b+c} \leq 2\sum bc - \sum a^2$$

Demostremos la desigualdad $4\sum \frac{a^2(s-a)}{b+c} \le 2\sum bc - \sum a^2$, denotando por $M = \sum \frac{a^2(s-a)}{b+c}$. Es entonces claro que tenemos

$$M + \sum a(s-a) = \sum a(s-a)\left(\frac{a}{b+c} - 1\right) = 2s\sum \frac{a(s-a)}{b+c}$$

y entonces

$$M + \sum a(s-a) + 2s\sum (s-a) = 2s\sum (s-a)\left(\frac{a}{b+c} - 1\right) = 4s^2 \sum \frac{s-a}{b+c}$$

Por otra parte, las siguientes identidades son bien conocidas. La última de ellas se puede obtener con un poco más de esfuerzo.

$$\sum bc = s^2 + 4Rr + r^2$$
$$\sum a^2 = 2(s^2 - 4Rr - r^2)$$
$$\sum \frac{s-a}{b+c} = \frac{1}{2}\left(1 + 2r\frac{3R+2r}{s^2 + r(r+2R)}\right)$$

donde R, r y s son los radios de la circunferencia circunscrita, inscrita y el semiperímetro del triángulo, respectivamente. Entonces, tenemos que

$$\sum a(s-a) + 2s\sum (s-a) = s\sum a - \sum a^2 + 2s(3s-2s) = 2s^2 + 2r^2 + 8Rr.$$

y por tanto, tenemos para M

$$M = 2s^2\left(1 + 2r\frac{3R+2r}{s^2 + r(r+2R)}\right) - 2s^2 - 2r^2 - 8Rr = 2r\frac{s^2(2R+3r) - r(r+2R)(r+4R)}{s^2 + r(r+2R)} =$$
$$= 2r\left(2R + 3r - \frac{2r(r+2R)(2r+3R)}{s^2 + r(r+2R)}\right)$$

Por otra parte, de la conocida identidad $2\sum bc - \sum a^2 = 4r^2 + 16Rr$, obtenemos

$$2\sum bc - \sum a^2 \ge 4M \Leftrightarrow r + 4R \ge 4R + 6r - \frac{4r(r+2R)(2r+3R)}{s^2 + r(r+2R)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4(r+2R)(2r+3R)}{s^2 + r(r+2R)} \ge 5 \Leftrightarrow 5s^2 + 5r(r+2R) \le 4(r+2R)(2r+3R) \Leftrightarrow$$
$$5s^2 \le 3(r+2R)(r+4R) \Leftrightarrow s^2 \le \frac{3}{5}(r+4R)(r+2R)$$

y la última desigualdad es cierta. Esto se ve al aplicar una de las dos desigualdades de Gerretsen $s^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$, y la desigualdad de Euler-Chapple $2r \le R$, teniendo que se cumple

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \le \frac{3}{5}(r+4R)(r+2R) \Leftrightarrow 0 \le 4R^2 - 2Rr - 12r^2 \Leftrightarrow 0 \le 2(R-2r)(2R+3r)$$

con lo que la desigualdad es cierta.

Por otra parte, la demostración de la segunda desigualdad $\sqrt{3}\cdot\Delta \le \sum \frac{a^2(s-a)}{b+c}$, es bastante más larga y refinada que la anterior. El lector la puede revisar en el artículo [7] para todos sus detalles. Únicamente expondremos aquí, las bases fundamentales de la misma. Notemos que la desigualdad es equivalente a las siguientes desigualdades

$$M = 2r\left(2R + 3r - \frac{2r(r+2R)(2r+3R)}{s^2 + r(r+2R)}\right) \ge \sqrt{3}\cdot rs \Leftrightarrow$$

$$2\left[(2R+3r)s^2 + r(r+2R)(2R+3r-2(2r+3R))\right] \ge \sqrt{3}\cdot\left(s^3 + sr(r+2R)\right) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}\cdot s^3 - 2(2R+3r)s^2 + \sqrt{3}\cdot r(r+2R)s + 2r(r+2R)(r+4R) \le 0$$

Llegados aquí, los autores (Bilchev-Vlamos) indican que la desigualdad obtenida es única en su género puesto que es una cúbica en *s* con no todos sus coeficientes positivos, lo que complica extraordinariamente su tratamiento. Afortunadamente algunos cambios de variable y otra serie de consideraciones permiten demostrar la certidumbre de la desigualdad, con lo que concluiría la demostración.

3.3 Refinamiento de Pohoata

Cinco años más tarde de que en 1937, Finsler y Hadwiger propusieran su refinamiento a la desigualdad de Weitzenböck, D. Pedoe [8] demostró una importante desigualdad que comúnmente se conoce como desigualdad de Neuberg-Pedoe..Esta desigualdad afirma que si *a, b, c* y *x, y, z* son los lados de dos triángulos *ABC* y *XYZ* con áreas *S* y *T*, respectivamente, entonces se tiene que

$$a^2(y^2+z^2-x^2) + b^2(z^2+x^2-y^2) + c^2(x^2+y^2-z^2) \ge 16ST$$

con igualdad si y sólo si los triángulos *ABC* y *XYZ* son semejantes.

Varias demostraciones de esta desigualdad se han publicado, pero la que exponemos aquí es quizá una de las más sencillas.

Demostración: Consideremos dos triángulo $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ en el mismo plano. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las coordenadas de sus vértice son la siguientes: $A_1(0, p_1)$, $B_1(p_2, 0)$, $C_1(p_3, 0)$, $A_2(0, q_1)$, $B_2(q_2, 0)$, $C_2(q_3, 0)$. Entonces, de la desigualdad $x^2 + y^2 \ge 2|xy|$, se sigue que

$$a_1^{\,2}(b_2^{\,2}+c_2^{\,2}-a_2^{\,2})+b_1^{\,2}(c_2^{\,2}+a_2^{\,2}-b_2^{\,2})+c_1^{\,2}(a_2^{\,2}+b_2^{\,2}-c_2^{\,2})=$$
$$(p_3-p_2)^2(2q_1^{\,2}+2q_1q_2)+(p_1^{\,2}+p_3^{\,2})(2q_2^{\,2}-2q_2q_3)+(p_1^{\,2}+p_2^{\,2})(2q_3^{\,2}-2q_2q_3)=$$
$$2(p_3-p_2)^2q_1^{\,2}+2(q_3.-q_2)^2p_1^{\,2}+2(p_3q_2-p_2q_3)^2\geq$$
$$2((p_3-p_2)q_1)^2+2((q_3-q_2)p_1)^2\geq 4|(p_3-p_2)q_1|\cdot|(q_3-q_2)p_1|=16ST$$

Para llegar al refinamiento de C. Pohoata [9] necesitamos un lema que a veces se conoce como lema de Conway.

Lema: *Sean u, v, w tres números reales tales que* $v+w, w+u, u+v$ *y* $vw+wu+uv$ *son todos no negativos. Entonces existe un triángulo XYZ con longitudes de sus lados* $x=YZ=\sqrt{v+w}$, $y=ZX=\sqrt{w+u}$, $z=XY=\sqrt{u+v}$. *Este triángulo satisface las relaciones* $y^2+z^2-x^2=2u$, $z^2+x^2-y^2=2v$, $x^2+y^2-z^2=2w$. *El área T de este triángulo es* $T=\frac{1}{2}\sqrt{vw+wu+uv}$. *Si* $X=\angle ZXY$, $Y=\angle XYZ$, $Z=\angle YZX$ *son los ángulos de este triángulo, entonces se cumple que* $\cot X=\frac{u}{2T}$, $\cot Y=\frac{v}{2T}$, $\cot Z=\frac{w}{2T}$.

Demostración: Dado que los números $u+v$, $v+w$, $w+u$ son no negativos, sus raíces cuadradas $\sqrt{u+v}$, $\sqrt{v+w}$, $\sqrt{w+u}$ existen, y evidentemente son también no negativas. Además, tenemos que $\sqrt{w+u}+\sqrt{u+v}\geq\sqrt{v+w}$, ya que

$$\begin{aligned}\sqrt{w+u}+\sqrt{u+v}\geq\sqrt{v+w} &\Leftarrow (w+u)+(u+v)+2\sqrt{(w+u)(u+v)}\geq v+w\\ &\Leftarrow 2\sqrt{(w+u)(u+v)}\geq -2u\\ &\Leftarrow (w+u)(u+v)\geq(-u)^2\\ &\Leftarrow vw+wu+uv\geq 0\end{aligned}$$

De forma análoga se demuestran las otras dos desigualdades. Entonces existe un triángulo *XYZ* de lados $x=YZ=\sqrt{v+w}$, $y=ZX=\sqrt{w+u}$, $z=XY=\sqrt{u+v}$. Además

$$y^2+z^2-x^2=(w+u)+(u+v)-(v+w)=2u$$

y análogamente para las otras dos cantidades. Utilizando la conocida identidad

$$\cot Z=\frac{x^2+y^2-z^2}{4T}$$

se deduce que $\cot Z=w/2T$, y análogamente $\cot X=u/2T$ y $\cot Y=v/2T$. Finalmente, a partir de la conocida identidad trigonométrica para los ángulos de un triángulo

$$\cot Y\cot Z+\cot Z\cot X+\cot X\cot Y=1$$

y sustituyendo por las relaciones anteriores, tenemos que

$$\frac{v}{2T}\cdot\frac{w}{2T}+\frac{w}{2T}\cdot\frac{u}{2T}+\frac{u}{2T}\cdot\frac{v}{2T}=1 \Leftrightarrow uv+vw+wu=4T^2$$

y, en consecuencia $T=\frac{1}{2}\sqrt{uv+vw+wu}$, lo que concluye la demostración del lema. ■

El refinamiento de C. Pohoata a la desigualdad FH viene dado por el siguiente teorema.
Teorema: *Sea ABC un triángulo de lados a, b, c, y área* Δ *y sean x, y, z números reales positivos. Entonces tenemos la desigualdad*

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta+\frac{2}{x+y+z}\left(\frac{x^2-yz}{x}\cdot a^2+\frac{y^2-zx}{y}\cdot b^2+\frac{z^2-xy}{z}\cdot c^2\right)$$

Demostración: Comenzaremos la demostración utilizando el lema anterior y demostrando que si *ABC* es un triángulo de lados *a*, *b*, *c* y área Δ, y *u*, *v*, *w* tres números reales tales que los números $v+w, w+u, u+v$ y $vw+wu+uv$ son todos no negativos, entonces se tiene que $ua^2+vb^2+wc^2 \geq 4\sqrt{uv+vw+wu}\cdot\Delta$. De acuerdo con el lema, podemos construir un triángulo *XYZ* tal como se especifica. Aplicando la desigualdad de Neuberg-Pedoe a los triángulos *ABC* y *XYZ* tenemos que

$$a^2(y^2+z^2-x^2)+b^2(z^2+x^2-y^2)+c^2(x^2+y^2-z^2) \geq 16\Delta T$$

Por otra parte, por las fórmulas de sustitución dadas en el lema, llegamos a la siguiente desigualdad equivalente

$$a^2\cdot 2u+b^2\cdot 2v+c^2\cdot 2w \geq 16\Delta\cdot\frac{1}{2}\sqrt{uv+vw+wu}$$

que se simplifica a

$$ua^2+vb^2+wc^2 \geq 4\sqrt{uv+vw+wu}\cdot\Delta$$

Finalmente, haciendo

$$m=xyz(x+y+z)-2yz(x^2-yz)$$
$$n=xyz(x+y+z)-2zx(y^2-zx)$$
$$p=xyz(x+y+z)-2xy(z^2-xy)$$

entonces $n+p, p+m, m+n$ son todos positivos, y además

$$mn+np+pm=3x^2y^2z^2(x+y+z)^2 \geq 0$$

y, aplicando la conclusión anterior tenemos que

$$\sum\left[xyz(x+y+z)-2yz(x^2-yz)\right]\cdot a^2 \geq 4xyz(x+y+z)\sqrt{3}\cdot\Delta$$

desigualdad que podemos reescribirla en la forma

$$\sum\left[(x+y+z)-2\cdot\frac{x^2-yz}{x}\right]\cdot a^2 \geq 4(x+y+z)\sqrt{3}\cdot\Delta$$

y, que es equivalente a

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta+\frac{2}{x+y+z}\left(\frac{x^2-yz}{x}\cdot a^2+\frac{y^2-zx}{y}\cdot b^2+\frac{z^2-xy}{z}\cdot c^2\right)$$

Nota: Observemos que para $x=a$, $y=b$, $z=c$ y haciendo uso de la identidad

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

la desigualdad se transforma en la desigualdad FH, y por tanto generaliza la misma.

3.4 Refinamiento vía transformaciones

En el artículo ya mencionado [7], se indica que es posible crear una infinidad de desigualdades que mejoren constantemente la desigualdad de Finsler-Hadwiger, y además, manteniendo su propia estructura. Es bien conocida la transformación siguiente

$$T: a \Rightarrow \sqrt{a(s-a)}\,, \quad \Delta \Rightarrow \frac{\Delta}{2}$$

para la que la demostración es relativamente simple, indicando que mantiene la desigualdad triangular y reduce el área a la mitad.

De esta forma, aplicando esta transformación a la desigualdad de Weitzenböck, que denotaremos por FH0, obtenemos la desigualdad de Finsler-Hadwiger, que denotaremos por FH1. Aplicando de nuevo la misma transformación a la desigualdad FH1, obtenemos la desigualdad de Finsler-Hadwiger mejorada FH2, y así sucesivamente. Es obvio que cada desigualdad, mejora la desigualdad previa, obteniéndose la siguiente cadena de desigualdades cada vez más precisas:

FH0 $\quad a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta$ $\qquad$ Weitzenböck

FH1 $\quad a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta+\sum(b-c)^2$ $\qquad$ Finsler-Hadwiger

FH2 $\quad a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta+\sum(b-c)^2+2\sum\left(\sqrt{b(s-b)}-\sqrt{c(s-c)}\right)^2$

FH3 $\quad a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta+\sum(b-c)^2+2\sum\left(\sqrt{b(s-b)}-\sqrt{c(s-c)}\right)^2+4\sum[........]^2$

4.- Algunas reflexiones

Hemos visto una serie de desigualdades que refinan la desigualdad de Finsler-Hadwiger. A veces se utiliza esta misma desigualdad para refinar desigualdades menos precisas. Uno de los refinamientos más sorprendentes a la desigualdad de Weitzenböck fue propuesto por G.Tsintsifas de la forma siguiente:
Teorema (Tsintisifas): "*Sean p, q, r tres números reales positivos, a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo y* Δ *su área, entonces se tiene la desigualdad*

$$\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\geq 2\sqrt{3}\cdot\Delta$$

Demostración: Utilizando la desigualdad de Finsler-Hadwiger, es suficiente mostrar que

$$\frac{p}{q+r}a^2+\frac{q}{r+p}b^2+\frac{r}{p+q}c^2\geq\frac{1}{2}(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{p+q+r}{q+r}\right)a^2+\left(\frac{p+q+r}{r+p}\right)b^2+\left(\frac{p+q+r}{p+q}\right)c^2\geq\frac{1}{2}(a+b+c)^2\Leftrightarrow$$
$$\big((q+r)+(r+p)+(p+q)\big)\left(\frac{1}{q+r}a^2+\frac{1}{r+p}b^2+\frac{1}{p+q}c^2\right)\geq(a+b+c)^2$$

donde hemos utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. ■

Nota: Observemos que la desigualdad de Weitzenböck surge para $p=q=r$, y otras múltiples desigualdades interesantes surgen de la misma, por ejemplo con $p=s-a$, $q=s-b$, $r=s-c$, etc.

Anteriormente hemos comentado que en un triángulo es cierta la siguiente cadena de desigualdades

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}\geq 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq 18Rr\geq 4\sqrt{3}\cdot\Delta$$

Podríamos pensar si la desigualdad FH podría relajarse un tanto sustituyendo el término $4\sqrt{3}\cdot\Delta$ de la desigualdad por el valor del penúltimo de la cadena de desigualdades, es decir, por 18*Rr*. Veamos que desgraciadamente esto no es posible puesto que tenemos que se cumple la desigualdad

$$a^2+b^2+c^2\leq 18Rr+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

que es equivalente a la desigualdad

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\leq 18Rr=\frac{9abc}{a+b+c}$$

que ya sabemos que es cierta, por lo comentado previamente.

Podemos intentar calcular el valor exacto de la expresión $a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\cdot\Delta$ que aparece como parte constituyente en las desigualdades de Weitzenböck y Finsler-Hadwiger. En el problema 487 de esta revista, el autor de este artículo propuso demostrar la expresión

$$FG^2=\frac{1}{18}\cdot\left[a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\cdot\Delta\right]$$

donde FG es la distancia entre el punto de Fermat y el baricentro del mismo. Observemos que la expresión proporciona otra demostración de la desigualdad de Weitzenböck, y además se obtiene el valor

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\cdot\Delta=18FG^2$$

que como se puede observar, es constructible con regla y compás, puesto que el punto de Fermat y el baricentro de un triángulo, también lo son.

En el problema 478 de esta revista, el autor propuso demostrar que si ABC es un triángulo donde el mayor de sus ángulos no supera 120º, P es un punto interior y si Δ es su área, entonces se tiene la desigualdad

$$(AP+BP+CP)_{mínima}\geq 2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{\Delta}$$

En la solución al problema aparecía la expresión que proporciona la suma de distancias mínima de un punto interior al triángulo respecto de sus vértices. Dicha expresión viene dada por

$$(AP+BP+CP)_{mínima}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\cdot\Delta}{2}}$$

Para demostrar la desigualdad pedida bastaba utilizar la desigualdad de Weitzenböck, obteniéndose

$$(AP+BP+CP)_{mínima}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}\cdot\Delta}{2}}\geq\sqrt{\frac{8\sqrt{3}\cdot\Delta}{2}}=2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{\Delta}$$

En realidad la desigualdad se puede prolongar, ya que utilizando la desigualdad bien conocida $3\sqrt{3}\cdot r\leq s$, llegamos a

$$(AP+BP+CP)_{mínima}\geq 2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{\Delta}=2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{rs}\geq 2\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3\sqrt{3}}\cdot r=6r$$

que es otra desigualdad muy importante en la geometría del triángulo.

Si en la expresión anterior aplicamos la desigualdad de Finsler-Hadwiger en lugar de desigualdad de Weitzenböck, tenemos la desigualdad más refinada

$$(AP+BP+CP)_{mínima}\geq\sqrt{4\sqrt{3}\cdot\Delta+\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}}$$

De este modo podemos ir refinando sucesivamente la desigualdad anterior utilizando los refinamientos sucesivos de la desigualdad FH vistos con anterioridad.

Bibliografía

[1] R. Weitzenböck, *Uber eine Ungleichung in der Dreiecksgometrie, Math. Z.* 1919, 137-146.
[2] P. Finsler y H. Hadwiger, *Comment. Mat. Helv., 10,* 1937/38. 316-326
[3] C. Lupu, *An elemntary Proof of the Hadwiger-Finsler inequality*. Arhimede Magzine, 3, nº 9-10 (2003), 18-19
[4] C. Lupu y C. Pohoata, *Sharpness of the Finsler-Hadwiger inequality*.
[5] I. Pushkarov, *Mathematics and Informatics*, nº 2, Problems, Sofía, 1999
[6] A. Antonov y A. Simeonov, *About a Strong Geometric Inequality*, Mathematics and Informatics, nº 2,3, 2000, Sofía, 102-105
[7] S. J. Bilchev y P. M. Vlamos, *About some improvements of the Finsler-Hadwiger inequality*.
[8] D. Pedoe, *An Inequality for Two Triangles*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 38 (1943)
[9] C. Pohoata, *From Neuberg-Pedoe Back to hadwiger-Finsler*