

REFLEXIONES SOBRE EL TEOREMA DE ERDÖS-MORDELL Y SUS DEMOSTRACIONES

Vicente Vicario García

Con motivo del problema 500 de la revista digital *triánguloscabri*

ÍNDICE

1.- Introducción	2
2.- Algunas demostraciones del teorema de Erdős-Mordell	
2.1. Demostración de V. Komornik	3
2.2. Demostración de H. Lee	4
2.3. Demostración de Mordell	5
2.4. Demostración de S. Dar y S. Gueron	6
3.- Algunas aplicaciones del teorema	8
4.- Limitaciones del teorema y generalizaciones. Algunas reflexiones.	10
Bibliografía	

1.- Introducción

El teorema de Erdős-Mordell es una de las joyas de la geometría del triángulo. Fue conjeturado por Erdős y planteado como problema 3740 en la sección de “*Problemas avanzados*” de la legendaria revista *American Mathematical Monthly* (en adelante la representaremos por las siglas *AMM*) en el número 42 de 1935, pág 396. Decía lo siguiente:

Problema 3740. Proposed by Paul Erdős, The University of Manchester, England.

From a point O inside a given triangle ABC the perpendiculars OP, OQ, OR are drawn to its sides. Prove that

$$OA + OB + OC \geq 2 \cdot (OP + OQ + OR)$$

Se cree que Erdős llegó a plantear su conjetura de forma puramente empírica en 1932 después de tratar la situación con triángulos variados y de estudiar múltiples consideraciones. Kazarinoff especula con la idea de que Erdős intentó generalizar la desigualdad de Euler-Chapple para el triángulo $R \geq 2r$, ya que de ser cierta su desigualdad para triángulos acutángulos, implicaría inmediatamente la desigualdad anterior. De hecho, si escogemos como punto interior el circuncentro del triángulo y le aplicamos la desigualdad y tenemos en cuenta el conocido teorema de Carnot, el resultado es inmediato

$$R + R + R \geq 2 \cdot (R + r) \Leftrightarrow R \geq 2r$$

La primera demostración, (de carácter trigonométrico), de que la conjetura era cierta, fue dada por L. J. Mordell y D. F. Barrow [2]. Más tarde, otras demostraciones elementales fueron publicadas. Algunas se basaban en un teorema de Pappus como la de D. K. Kazarinoff [4] en 1957, otras en el teorema de Ptolomeo como las de A. Avez [7] en 1993 y H. J. Lee [10] en 2001, otras en relaciones de semejanza entre triángulos como la de L. Bankoff [5] en 1958, otra en el concepto de área y consideraciones de simetría elementales como la de V. Komornik [8] en 1997, e incluso otra como la de A. Oppenheim [6] se basaba en el uso de transformaciones no triviales como el uso de conjugados isogonales, publicada en 1961.

Recientemente, y ya en este siglo, S. Dar y S. Gueron [9] generalizaron en 2001 la desigualdad de Erdős-Mordell, de modo que ésta surge como caso particular. N. Dergiades [11] analiza en 2004 la generalización de la desigualdad (ya prevista por Kazarinoff) a puntos fuera del triángulo y W. Janous [12] analiza en profundidad (también en 2004) algunas desigualdades que se deducen mediante transformaciones elementales del trabajo de S. Dar y S. Gueron, aplicándolas a puntos notables del mismo. En 2007, apareció una demostración elemental de fuerte carácter visual de C. Alsina y R. B. Nelsen [15], autores que también han propuesto *demostraciones visuales* muy interesantes de otras desigualdades como las de Weitzenböck o de Finsler-Hadwiger.

Debemos destacar finalmente las múltiples demostraciones alternativas (más de una docena) propuestas por G. Tsintsifas deducidas a lo largo de varios años. Todas ellas son muy ingeniosas, pero básicamente no añaden nada nuevo, aunque como indica

el propio autor: “Hace varios años busqué nuevas demostraciones del teorema de Erdős-Mordell, interesantes y de poca extensión” constituyendo ejercicios excelentes sobre la demostración para matemáticos jóvenes.

2.- Algunas demostraciones del teorema de Erdős-Mordell

A continuación y sumergiéndonos en la literatura del teorema, expondremos cuatro demostraciones del mismo, todas ellas basadas en conceptos diferentes. El análisis atento de estas demostraciones proporciona luz sobre la comprensión del teorema, sus limitaciones y sus posibles generalizaciones.

Teorema (Erdős-Mordell): “Dado un punto P en el interior de un triángulo ABC , denotemos por R_a, R_b, R_c sus distancias respectivas a los vértices A, B, C y por r_a, r_b, r_c sus distancias respectivas a los lados del triángulo BC, CA y AB . Entonces se cumple la desigualdad

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(r_a + r_b + r_c)$$

con igualdad si y sólo si el triángulo ABC es equilátero y P es su centro”.

Demostración 1ª (V. Komornik,[8]): La siguiente demostración usa sólo nociones básicas relacionadas con los conceptos de área y simetría. A lo largo de la misma utilizaremos la notación habitual en la geometría del triángulo.

Sea un triángulo ABC y P un punto en el lado BC . Es evidente que el doble del área del triángulo APC es igual a $b \cdot r_b$, el doble del área del triángulo ABP es $c \cdot r_c$, y el área del triángulo ABC es $b \cdot r_b + c \cdot r_c$. Por otra parte, es claro que R_a , no puede ser menor que la altura del triángulo ABC trazada desde el vértice A al lado BC . En consecuencia, tenemos que

$$a \cdot R_a \geq b \cdot r_b + c \cdot r_c \quad [*]$$

Es importante observar que esta desigualdad es válida para todo punto P en el dominio angular $\angle BAC$. Es suficiente con notar que la desigualdad anterior es equivalente, por semejanza, a la desigualdad correspondiente relativa al punto P' sobre el lado BC que resulta como intersección de la recta AP con dicho lado.

Si el triángulo de partida ABC es equilátero, la desigualdad que afirma el teorema sigue siendo válida. De hecho, es suficiente poner $a = b = c$ y sumar las dos desigualdades $R_b \geq r_c + r_a$, y $R_c \geq r_a + r_b$ obtenidas por permutación cíclica. También es fácil ver que la igualdad $R_a + R_b + R_c = 2(r_a + r_b + r_c)$ se cumple si y sólo si P es el centro del triángulo equilátero de partida.

Si el triángulo ABC no es equilátero entonces necesitamos un simple corolario de la desigualdad [*]. Aplicando esta desigualdad al punto simétrico P' respecto de la bisectriz interior del ángulo $\angle BAC$, tenemos claramente que $R_a' = R_a$, $r_b' = r_c$ y $r_c' = r_b$ con la notación primada para distancias medidas desde P' y sin primar como notación normal. Entonces $a \cdot R_a \geq b \cdot r_c + c \cdot r_b$ para todo punto P en el dominio angular $\angle BAC$. Por otra parte, si P es interior al triángulo ABC , entonces también tenemos por simetría

que $b \cdot R_b \geq c \cdot r_a + a \cdot r_c$ y $c \cdot R_c \geq a \cdot r_b + b \cdot r_a$. Entonces el teorema se deduce inmediatamente, obteniéndose

$$R_a + R_b + R_c \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cdot r_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \cdot r_b + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot r_c > 2 \cdot (r_a + r_b + r_c)$$

donde hemos utilizado la desigualdad elemental $x + 1/x \geq 2$, $\forall x > 0$. Notemos que tenemos desigualdad estricta porque por hipótesis a, b, c no son todos iguales. ■

Demostración 2ª (H. J. Lee[10]): La siguiente demostración recurre al teorema de Ptolomeo para cuadriláteros cíclicos y a consideraciones geométricas elementales.

De nuevo utilizaremos la notación habitual en la geometría del triángulo. Sea P un punto interior al triángulo ABC y sean D, E, F los pies de las perpendiculares trazadas desde este punto a los lados BC, CA y AB , respectivamente. Sea HG la proyección ortogonal del segmento BC sobre la recta FE . Entonces es claro que se cumple $BC \geq HG = HF + FE + EG$. Además, puesto que $\angle BFH = \angle AFE = \angle APE$ (por ser estos dos últimos inscritos en la misma circunferencia $AEPF$ y abarcar el mismo arco AE) se deduce que los triángulos rectángulos BFH y APE son semejantes y

$$HF = \frac{PE}{PA} \cdot BF$$

y de forma análoga se puede obtener que

$$EG = \frac{PF}{PA} \cdot CE.$$

Por otra parte, en virtud del teorema de Ptolomeo, aplicado al cuadrilátero cíclico $AFPE$, tenemos que

$$PA \cdot PE = AF \cdot PE + AE \cdot PF \rightarrow FE = \frac{AF \cdot PE + AE \cdot PF}{PA}$$

y combinando estos resultados, llegamos a

$$BC \geq \frac{PE}{PA} \cdot BF + \frac{AF \cdot PE + AE \cdot PF}{PA} + \frac{PF}{PA} \cdot CE$$

o bien

$$BC \cdot PA \geq PE \cdot BF + AF \cdot PE + AE \cdot PF + PF \cdot CE = PE \cdot AB + PF \cdot AC$$

y dividiendo por BC , tenemos que

$$PA \geq \frac{AB}{BC} \cdot PE + \frac{AC}{BC} \cdot PF$$

Finalmente, aplicando el mismo razonamiento a las otras proyecciones de los lados BA sobre la recta ED y CA sobre la recta ED , tenemos de forma similar

$$PB \geq \frac{BC}{CA} \cdot PF + \frac{BA}{CA} \cdot PD \quad \text{y} \quad PC \geq \frac{CA}{AB} \cdot PA + \frac{CB}{AB} \cdot PE$$

y sumando las tres desigualdades llegamos a

$$PA + PB + PC \geq \left(\frac{BA}{CA} + \frac{CA}{BA} \right) \cdot PD + \left(\frac{BA}{BC} + \frac{BC}{BA} \right) \cdot PE + \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC} \right) \cdot PF$$

Finalmente, de la desigualdad $x + 1/x \geq 2$, $\forall x > 0$, se sigue inmediatamente que

$$PA + PB + PC \geq 2 \cdot (PD + PE + PF)$$

Por otra parte, es inmediato comprobar que la igualdad surge si y sólo si el triángulo de partida es equilátero y P su centro. ■

Demostración 3ª (L. Mordell y D. Barrow): La siguiente demostración es de tipo trigonométrico y generaliza la desigualdad propuesta por Erdős.

Denotemos por P un punto en el interior del triángulo ABC , por R_a, R_b, R_c sus distancias a los vértices respectivos A, B, C y por r_a', r_b', r_c' las longitudes respectivas de las bisectrices interiores de los ángulos $\angle BPC$ (del triángulo BPC), $\angle CPA$ (del triángulo CPA) y $\angle APB$ (del triángulo APB). Denotemos también por $\angle BPC = 2\alpha$, $\angle CPA = 2\beta$, $\angle APB = 2\gamma$.

Al comparar el área del triángulo PBC con las áreas de las dos partes en que queda descompuesto al trazar la bisectriz interior y utilizar la desigualdad $R_b + R_c \geq 2\sqrt{R_b \cdot R_c}$, tenemos que

$$R_b R_c \sin 2\alpha = r_a' \cdot (R_b + R_c) \sin \alpha \geq 2 \cdot r_a' \sin \alpha$$

donde la igualdad ocurre solamente cuando $R_b = R_c$. En consecuencia, teniendo en cuenta la expresión clásica del seno del ángulo doble, llegamos a

$$\sqrt{R_b R_c} \cdot \cos \alpha \geq r_a'$$

y de forma análoga obtenemos $\sqrt{R_c R_a} \cdot \cos \beta \geq r_b'$ y $\sqrt{R_a R_b} \cdot \cos \gamma \geq r_c'$.

Por otra parte, de la identidad

$$\begin{aligned} R_a + R_b + R_c - 2\sqrt{R_b R_c} \cdot \cos \alpha - 2\sqrt{R_c R_a} \cdot \cos \beta - 2\sqrt{R_a R_b} \cdot \cos \gamma = \\ = \left(\sqrt{R_a} - \sqrt{R_b} \cdot \cos \gamma - \sqrt{R_c} \cdot \cos \beta \right)^2 + \left(\sqrt{R_b} \cdot \sin \gamma - \sqrt{R_c} \cdot \sin \beta \right)^2 \end{aligned}$$

y de las expresiones anteriores, se deduce claramente que

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(r_a' + r_b' + r_c') \geq 2(r_a + r_b + r_c)$$

La igualdad ocurre solamente cuando se tienen las igualdades $R_a = R_b = R_c$, $\sqrt{R_b} \cdot \sin \gamma = \sqrt{R_c} \cdot \sin \beta$, $\sqrt{R_a} = \sqrt{R_b} \cdot \cos \gamma + \sqrt{R_c} \cdot \cos \beta$, de manera que $\alpha = \beta = \gamma$, y en consecuencia el triángulo es equilátero y P es su centro. ■

Nota: La desigualdad $R_a + R_b + R_c \geq 2(r_a' + r_b' + r_c')$ se puede considerar una extensión o mejora sustancial al teorema de Erdős-Mordell, y de hecho, fue advertida por primera vez por D. F. Barrow, conociéndose desde entonces como desigualdad de Barrow.

Demostración 4ª (S. Dar y S. Gueron[9]): En esta demostración se generaliza el teorema probando una desigualdad con pesos. La desigualdad de Erdős-Mordell surge entonces como un corolario particular para pesos iguales.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tres constantes positivas. Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo con lados a_1, a_2, a_3 y ángulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ respectivamente opuestos a los mismos. Sea P un punto interior al triángulo y F_i el pie de la perpendicular trazada desde P al lado opuesto al vértice A_i . Denotemos $PA_i = R_i$ y $PF_i = r_i$. Demostraremos que entonces se cumple la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot R_i \geq 2 \cdot \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot r_i$$

con igualdad si y sólo si $\frac{a_1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{a_2}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{a_3}{\sqrt{\lambda_3}}$ y P el circuncentro del triángulo $A_1A_2A_3$.

El cuadrilátero $A_1F_2PF_3$ es cíclico por poseer dos ángulos opuestos que son rectos, y en consecuencia $\angle F_2PF_3 = 180^\circ - \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$. Entonces, en virtud del teorema de los cosenos aplicado al triángulo PF_2F_3 , tenemos que

$$\begin{aligned} F_2F_3^2 &= PF_2^2 + PF_3^2 - 2PF_2 \cdot PF_3 \cdot \cos(\angle F_2PF_3) = r_2^2 + r_3^2 - 2r_2 \cdot r_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) = \\ &= (\sin^2 \alpha_3 + \cos^2 \alpha_3) \cdot r_2^2 + (\sin^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2) \cdot r_3^2 + 2(\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3) \cdot r_2 r_3 = \\ &= (r_2 \sin \alpha_3 + r_3 \sin \alpha_2)^2 + (r_2 \cos \alpha_3 - r_3 \cos \alpha_2)^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, es bien sabido que PA_1 es el diámetro de la circunferencia $A_1F_2PF_3$, así que, a partir del teorema de los senos generalizado, llegamos a la expresión

$$F_2F_3 = A_1P \sin \alpha_1 = R_1 \sin \alpha_1$$

y finalmente, obtenemos que

$$(R_1 \operatorname{sen} \alpha_1)^2 = F_2 F_3^2 = (r_2 \operatorname{sen} \alpha_3 + r_3 \operatorname{sen} \alpha_2)^2 + (r_2 \cos \alpha_3 - r_3 \cos \alpha_2)^2 \geq (r_2 \operatorname{sen} \alpha_3 + r_3 \operatorname{sen} \alpha_2)^2$$

y, en consecuencia

$$R_1 \geq \frac{\operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \alpha_1} \cdot r_2 + \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_1} \cdot r_3$$

La igualdad en la expresión anterior surge si y sólo si $r_2 \cos \alpha_3 = r_3 \cos \alpha_2$, y entonces, si y sólo si

$$\frac{\operatorname{sen}(\angle A_2 A_1 P)}{\operatorname{sen}(\angle A_3 A_1 P)} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{\cos \alpha_3}{\cos \alpha_2} = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha_3)}{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha_2)}$$

donde $\angle A_2 A_1 P + \angle A_3 A_1 P = (90^\circ - \alpha_3) + (90^\circ - \alpha_2)$, y por tanto, se sigue la igualdad si y sólo si $\angle A_2 A_1 P = 90^\circ - \alpha_3$, y $\angle A_3 A_1 P = 90^\circ - \alpha_2$, lo que significa que P surge en la línea que une A_1 con el circuncentro del triángulo. De forma análoga tenemos que

$$R_2 \geq \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} \cdot r_3 + \frac{\operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \alpha_2} \cdot r_1 \quad \text{y} \quad R_3 \geq \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_3} \cdot r_1 + \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_3} \cdot r_2$$

con análogas condiciones para la igualdad. Multiplicando las desigualdades para R_1 , R_2 y R_3 por λ_1 , λ_2 y λ_3 respectivamente y sumándolas después, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 &\geq \left[\lambda_2 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \alpha_2} \right) + \lambda_3 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_3} \right) \right] \cdot r_1 + \left[\lambda_3 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_3} \right) + \lambda_1 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \alpha_1} \right) \right] \cdot r_2 \\ &+ \left[\lambda_1 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_1} \right) + \lambda_2 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha_2} \right) \right] \cdot r_3 \end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si P es el circuncentro del triángulo $A_1 A_2 A_3$.

Utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, tenemos que

$$\lambda_2 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \alpha_2} \right) + \lambda_3 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_3} \right) \geq 2\sqrt{\lambda_2 \lambda_3}$$

con igualdad si y sólo si

$$\lambda_2 \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha_3}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \lambda_3 \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_3} \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_3} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha_3} = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_3}}$$

y análogamente

$$\lambda_3 \cdot \left(\frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \alpha_3} \right) + \lambda_1 \cdot \left(\frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \alpha_1} \right) \geq 2\sqrt{\lambda_3 \lambda_1}$$

$$\lambda_1 \cdot \left(\frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \alpha_1} \right) + \lambda_2 \cdot \left(\frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \alpha_2} \right) \geq 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$$

con análogas condiciones para la igualdad.

Finamente, combinando las tres desigualdades anteriores, tenemos que

$$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i R_i \geq 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} r_i$$

lo que demuestra el teorema. Por otra parte, haciendo ahora $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, surge la desigualdad de Erdős-Mordell como caso particular, con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero y P es su centro.

3.- Algunas aplicaciones del teorema

A continuación utilizaremos la notación habitual en la geometría del triángulo y expondremos algunas aplicaciones geométricas interesantes del teorema de Erdős-Mordell, algunas de ellas particularizando para puntos notables del triángulo.

(a) Comenzaremos aplicando el teorema tomando como punto interior de un triángulo el incentro del mismo, de modo que

$$\frac{r}{\text{sen} \frac{A}{2}} + \frac{r}{\text{sen} \frac{B}{2}} + \frac{r}{\text{sen} \frac{C}{2}} \geq 2 \cdot (r + r + r) \Leftrightarrow \cos ec \frac{A}{2} + \cos ec \frac{B}{2} + \cos ec \frac{C}{2} \geq 6$$

Nota: Observemos que esta misma desigualdad se puede obtener aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica junto con la desigualdad clásica $\text{sen} \frac{A}{2} \text{sen} \frac{B}{2} \text{sen} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$, de manera que

$$\frac{1}{\text{sen} \frac{A}{2}} + \frac{1}{\text{sen} \frac{B}{2}} + \frac{1}{\text{sen} \frac{C}{2}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\text{sen} \frac{A}{2} \text{sen} \frac{B}{2} \text{sen} \frac{C}{2}}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{8} = 6$$

(b) Apliquemos ahora la desigualdad al circuncentro de un triángulo, de modo que ahora es sencillo obtener

$$R + R + R \geq 2R \cdot (\cos A + \cos B + \cos C) \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

que es otra de las desigualdades clásicas bien conocidas.

(c) Utilizaremos la desigualdad de Erdős-Mordell para resolver la siguiente proposición.

Proposición: “Sea ABC un triángulo e I su incentro. Entonces al menos una de las distancias IA , IB , IC es mayor o igual que el diámetro de la circunferencia inscrita en el triángulo”.

La proposición se demuestra inmediatamente sin más que aplicar la desigualdad de Erdős-Mordell al incentro del triángulo, de manera que tenemos

$$IA + IB + IC \geq 2 \cdot (r + r + r) \Leftrightarrow IA + IB + IC \geq 6r$$

de donde se deduce inmediatamente la desigualdad pedida.

Nota: En realidad si P es un punto cualquiera interior a un triángulo se tiene la desigualdad $PA + PB + PC \geq 6r$,[†] de donde la conclusión anterior (al menos una de las distancias PA , PB , PC es mayor o igual a $2r$) se deduce no sólo para el incentro de un triángulo sino para todos sus puntos interiores.

(d) Una de las aplicaciones más sorprendentes del teorema de Erdős-Mordell es la demostración sencilla de la siguiente proposición (que apareció en I.M.O. 1991 como problema propuesto por Francia)

Proposición: “Sea ABC un triángulo y P un punto interior. Entonces al menos uno de los ángulos $\angle PAB$, $\angle PBC$ ó $\angle PCA$ es menor o igual que 30° ”.

Razonaremos por reducción al absurdo y supondremos que R_a , R_b , R_c denotan las distancias respectivas del punto P a los vértices A , B , C y por r_a , r_b , r_c sus distancias respectivas a los lados del triángulo BC , CA y AB . Supongamos entonces que ninguno de los ángulos $\angle PAB$, $\angle PBC$, $\angle PCA$ es menor de 30° . Se tienen entonces claramente las desigualdades siguientes

$$\text{sen}(\angle PAB) = \frac{r_c}{R_a} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow R_a < 2 \cdot r_c$$

$$\text{sen}(\angle PBC) = \frac{r_a}{R_b} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow R_b < 2 \cdot r_a$$

$$\text{sen}(\angle PCA) = \frac{r_b}{R_c} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow R_c < 2 \cdot r_b$$

Sumando ahora las tres desigualdades tenemos $R_a + R_b + R_c < 2 \cdot (r_a + r_b + r_c)$, que contradice el teorema de Erdős-Mordell. Esta contradicción demuestra la proposición propuesta.

Nota: Otra demostración totalmente diferente de esta proposición se puede ver en el libro “Cien problemas de matemáticas” de F. Bellot Rosado y M^a. Ascensión López Chamorro [16]. La exponemos aquí brevemente a modo de comparación con la anterior. La solución propuesta en el libro de Bellot es del profesor Omid Alí Kharamzadeh, de Irán, y es como sigue:

[†] Para una demostración ver notas finales del artículo *Refinamientos de la desigualdad de Finsler-Hadwiger* del mismo autor como conmemoración al problema 500 de trianguloscabri.

Sean $\alpha = \angle PAB$, $\beta = \angle PBC$, $\gamma = \angle PCA$; $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$.
Supongamos que α, β y γ son mayores de 30° . Si Δ es el área del triángulo ABC

$$\Delta = \frac{1}{2}cx \cdot \text{sen}\alpha + \frac{1}{2}ay \cdot \text{sen}\beta + \frac{1}{2}bz \cdot \text{sen}\gamma > \frac{1}{4}(cx + ay + bz) \quad [\#]$$

porque $\text{sen}\alpha$, $\text{sen}\beta$, $\text{sen}\gamma$ son mayores que $1/2$. Como por la desigualdad de Weitzenböck $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot \Delta$, se tiene que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3} \cdot (cx + ay + bz)$. Pero, por el teorema de los cosenos, tenemos que

$$\begin{aligned} x^2 &= b^2 + z^2 - 2bz \cos \gamma > b^2 + z^2 - \sqrt{3} \cdot bz & \left(\cos \gamma < \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ y^2 &= c^2 + x^2 - 2cx \cos \alpha > c^2 + x^2 - \sqrt{3} \cdot cx & \left(\cos \alpha < \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ z^2 &= a^2 + y^2 - 2ay \cos \beta > a^2 + y^2 - \sqrt{3} \cdot ay & \left(\cos \beta < \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

y sumando las tres desigualdades obtenemos

$$a^2 + b^2 + c^2 < \sqrt{3} \cdot (cx + ay + bz)$$

que contradice $[\#]$

4.- Limitaciones del teorema y generalizaciones. Algunas reflexiones.

En este apartado intentaremos proporcionar alguna limitación para ciertas generalizaciones que se podrían especular sobre el teorema de Erdős-Mordell. Es de destacar la ya mencionada desigualdad de Barrow que generaliza brillantemente el teorema.

Consideremos un triángulo ABC y K un punto interior al mismo. Tracemos ahora las cevianas AK , BK , CK hasta cortar de nuevo a los lados opuestos a los vértices A , B , C en los puntos P , Q , R respectivamente. ¿Será cierto que para todos los triángulos y para todos los puntos interiores K elegidos en el interior de un triángulo se cumple la desigualdad siguiente

$$AK + BK + CK \geq 2 \cdot (KP + KQ + KR)$$

generalizándose aún más el teorema de Erdős-Mordell? La respuesta es negativa. Para demostrarlo supondremos un triángulo con sus lados tales que $a < b < c$. Consideremos ahora un punto K interior a este triángulo de manera que esté *suficientemente cercano* al vértice B del triángulo y *muy cercano* también al lado AB del triángulo. En estas circunstancias tenemos que los segmentos AP y BQ se aproximarán mucho en cuanto a su longitud al segmento AB , y el segmento CR se aproximará a la medida del lado BC . De esta forma, tenemos que $AK + BK + CK$ se aproximará a la medida de la suma de los lados AB y BC , mientras que la suma $KP + KQ + KR$ se aproximará a la medida del

lado AB . En consecuencia no puede darse la desigualdad anterior y el teorema de Erdős-Mordell no puede generalizarse de esta forma.

La desigualdad se puede generalizar de otras formas. En el plano y considerando polígonos convexos y puntos de su interior, Fejes Tóth László demostró en 1948 que se tiene la desigualdad más general

$$\sum R_i = R_1 + R_2 + \dots + R_n \geq \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot (r_1 + r_2 + \dots + r_n) = \sum r_i$$

donde $\sum R_i$ es la suma de las distancias del punto a los vértices y $\sum r_i$ es la suma de las distancias del punto a los lados. Observemos que la desigualdad de Erdős-Mordell se deduce haciendo $n = 3$.

Pasando del plano al espacio tenemos que indicar que en 1957 D. K. Kazarinoff demostró una desigualdad análoga a la desigualdad de Erdős-Mordell para un punto P interior a un tetraedro. Demostró que si el circuncentro del tetraedro es interior al mismo, entonces se cumple $\sum R_i > 2\sqrt{2} \cdot \sum r_i$, donde $\sum R_i$ es la suma de las distancias de P a los vértices del tetraedro y $\sum r_i$ es la suma de las distancias de P a las caras del mismo, siendo $2\sqrt{2}$ la mejor constante posible.

Referencias bibliográficas

A lo largo de las referencias las siglas *AMM* representan la revista centenaria *American Mathematical Monthly* y *FG* la revista digital *Forum Geometricorum*.

- [1] P. Erdős, Problem 3740, *AMM* 42 (1935), 396
- [2] L. J. Mordell, and D. F. Barrow, *Solution 3740*, *AMM* 44 (1937), 252-254
- [3] L. J. Mordell, *Egy geometriai probléma megoldása* (Solution of a geometrical problem), *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* 11 (1935), 145-146
- [4] D. Z. Kazarinoff, *A simple proof of Erdős-Mordell inequality for triangles*. *Michigan Mathematical Journal*, 4 (1957), 97-98
- [5] L. Bankoff, *An elementary proof of the Erdős-Mordell theorem*, *AMM* 65 (1958), 521
- [6] A. Oppenheim, *The Erdős inequality and other inequalities for a triangle*, *AMM* 68 (1961), 226-230
- [7] A. Avez, *A short proof of a theorem of Erdős and Mordell*, *AMM* 100 (1993), 60-62
- [8] V. Komornik, *A short proof of Erdős-Mordell theorem*, *AMM* 104 (1997), 57-60
- [9] S. Dar and S. Gueron, *A weighted Erdős-Mordell inequality*, *AMM* 108 (2001), 165-167
- [10] H. J. Lee, *Another Proof of the Erdős-Mordell Theorem*, *FG* 1 (2001), 7-8
- [11] N. Dergiades, *Signed Distances and the Erdős-Mordell Inequality*, *FG* 4 (2004), 67-68

- [12] W. Janous, *Further Inequalities of Erdős-Mordell Type*, FG 4 (2004), 203-206
- [13] A. Kubatov, *Az Erdős-Mordell egyenlőtlenség*
- [14] G. Tsintsifas,
- [15] C. Alsina, and R. B. Nelsen, *A Visual Proof of the Erdős-Mordell Inequality*, FG 7 (2007), 99-102
- [16] F. Bellot y M^a. A. López, *Cien problemas de matemáticas. Combinatoria. Álgebra. Geometría*. Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Valladolid. 1994.