

REFLEXIONES SOBRE LA DESIGUALDAD DE EULER- CHAPPLE DE UN TRIÁNGULO

Vicente Vicario García

Con motivo del problema 500 de la revista digital *triánguloscabri*

ÍNDICE

1.- Introducción	2
2.- Demostraciones de varias desigualdades equivalentes a la desigualdad de Euler-Chapple.....	3
3.- Algunas desigualdades que refinan la desigualdad de Euler-Chapple	8
4.- Generalizaciones de la desigualdad. Algunas reflexiones	13

Bibliografía

1.- Introducción

La desigualdad de Euler-Chapple es una de las desigualdades clásicas fundamentales en la geometría del triángulo. Su carácter es elemental, pero no por ello trivial. De hecho, permanece ligada a múltiples desigualdades geométricas y trigonométricas equivalentes a ella. Esta famosa desigualdad afirma que en todo triángulo plano, si R y r representan, respectivamente, los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita al mismo, se tiene que $R \geq 2r$.

Parece que históricamente existen muy pocas dudas de que fue Chapple quien en 1746[†] [1] en *Miscellanea Curiosa Mathematica*, 2, el primero que demostró la desigualdad. También Euler en *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, 11 en 1765 demostró la desigualdad. En realidad, lo que hicieron Chapple y Euler fue demostrar la igualdad $OI^2 = R^2 - 2Rr$ para el cuadrado de la distancia entre el incentro y el circuncentro de un triángulo, expresión de la que se deduce inmediatamente la desigualdad.

A lo largo del artículo emplearemos la notación habitual en la geometría del triángulo, de modo que $a, b, c, A, B, C, R, r, s, \Delta, h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c, w_a, w_b, w_c, r_a, r_b, r_c$ serán magnitudes bien conocidas del mismo.

Este humilde trabajo ha sido inspirado fundamentalmente por los dos artículos que publicó D. Miguel Amengual Covas en 2003 en la revista digital *OIM*, dirigida por D. Francisco Bellot Rosado y que llevaban por títulos: “*La desigualdad de Euler a partir de otras desigualdades entre elementos de un triángulo*”. En estos artículos, el autor, de forma magistral, presenta en total catorce desigualdades de tipo geométrico y trigonométrico relacionadas con la geometría del triángulo, de las que se van deduciendo inmediatamente la desigualdad de Euler. Estas desigualdades eran las siguientes:

$$[1] \quad \frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

$$[2] \quad \frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{h_a}$$

$$[3] \quad R - 2r \geq w_a - h_a$$

$$[4] \quad \frac{1}{R^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{(2r)^2}$$

$$[5] \quad 8 \leq \frac{AI}{ID} \cdot \frac{BI}{IE} \cdot \frac{CI}{IF} \leq \frac{4R}{r}$$

$$[6] \quad \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R}$$

$$[7] \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{2}{R}$$

$$[8] \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \geq \frac{2}{R}$$

$$[9] \quad 6 \leq \frac{r_a + r_b}{r_c} + \frac{r_b + r_c}{r_a} + \frac{r_c + r_a}{r_b} = \frac{4R - 2r}{r}$$

$$[10] \quad 9r \leq r_a + r_b + r_c \leq \frac{9R}{2}$$

$$[11] \quad 3R \leq a \tan \frac{A}{2} + b \tan \frac{B}{2} + c \tan \frac{C}{2} \leq 5R - 4r$$

$$[12] \quad 9r \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$$

$$[13] \quad \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \geq \frac{2r}{R}$$

$$[14] \quad 9r \leq h_a + h_b + h_c \leq \frac{9R}{2}$$

[†] Sobre el año 1746 existen algunas dudas entre los historiadores de la matemática. Por ejemplo, Hofmann así lo considera.

En la desigualdad [5], I es el incentro del triángulo y D, E, F son los puntos de corte de las rectas AI, BI, CI (bisectrices interiores) con el lado opuesto a los vértices A, B, C respectivamente.

2.- Demostraciones de varias desigualdades equivalentes a la desigualdad de Euler-Chapple

En el primero de los artículos ya mencionados de M. Amengual, se exponen, sin demostración, una serie de diez desigualdades equivalentes a la desigualdad de Euler. En ese apartado demostraremos todas estas equivalencias. Las desigualdades que aparecían enumeradas eran las siguientes:

$$\begin{array}{ll}
 [1] \quad \frac{a}{-a+b+c} + \frac{b}{a-b+c} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3 & [2] \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2} \\
 [3] \quad \frac{1}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} + \frac{1}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C} + \frac{1}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} A} \geq 4 & [4] \quad \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \\
 [5] \quad \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4} & [6] \quad \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \\
 [7] \quad \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s} & [8] \quad \frac{a^2}{r_b r_c} + \frac{b^2}{r_c r_a} + \frac{c^2}{r_a r_b} \geq 4 \\
 [9] \quad r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a \geq h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a & [10] \quad \frac{1}{h_a - 2r} + \frac{1}{h_b - 2r} + \frac{1}{h_c - 2r} \geq \frac{3}{r}
 \end{array}$$

Pasemos ahora a demostrar la equivalencia de cada una de estas desigualdades con la desigualdad de Euler. En algunas, utilizaremos resultados bien conocidos, como la fórmula de Euler $abc = 4Rrs$, o la fórmula de Herón $\Delta = \sqrt{s(s-a)s(s-b)s(s-c)}$. En otras, deduciremos otras expresiones que iremos necesitando.

$$[1] \quad \frac{a}{-a+b+c} + \frac{b}{a-b+c} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3 \Leftrightarrow R \geq 2r$$

Una forma de demostrar la equivalencia es proceder de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 & \frac{a}{-a+b+c} + \frac{b}{a-b+c} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \geq 6 \Leftrightarrow \\
 & \frac{a(s-b)(s-c) + b(s-a)(s-c) + c(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)} \geq 6 \Leftrightarrow \\
 & (a+b+c)s^2 - 2(ab+bc+ca)s + 3abc \geq 6(s-a)(s-b)(s-c)
 \end{aligned}$$

puesto que $2s = a+b+c$. Por otra parte, podemos demostrar fácilmente la identidad $ab+bc+ca = s^2 + 4Rr + r^2$, a partir de la fórmula de Herón y de la fórmula de Euler.

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \Leftrightarrow r^2 s = (s-a)(s-b)(s-c) \Leftrightarrow \\
 r^2 s &= s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ca)s - abc \Leftrightarrow r^2 - s^2 + (ab+bc+ca) - 4Rr
 \end{aligned}$$

de donde se deduce el resultado. Entonces, la desigualdad inicial es equivalente a

$$(a+b+c)s^2 - 2(ab+bc+ca)s + 3abc \geq 6(s-a)(s-b)(s-c) \Leftrightarrow \\ 2s^3 - 2(s^2 + 4Rr + r^2) + 12Rrs \geq 6r^2s \Leftrightarrow R \geq 2r$$

lo que demuestra la proposición.

$$[2] \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

La demostración de la equivalencia en este caso, es inmediata, ya que a partir de la fórmula de Euler, tenemos que

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{abc} \geq \frac{1}{R^2} \Leftrightarrow 2s \cdot R^2 \geq 4Rrs \Leftrightarrow R \geq 2r$$

$$[3] \quad \frac{1}{\operatorname{sen}A \operatorname{sen}B} + \frac{1}{\operatorname{sen}B \operatorname{sen}C} + \frac{1}{\operatorname{sen}C \operatorname{sen}A} \geq 4 \Leftrightarrow R \geq 2r$$

Procederemos a demostrar la equivalencia empleando inicialmente el teorema de los senos generalizado, del cual podemos deducir de forma sencilla las relaciones

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} = 2R \rightarrow \begin{cases} \frac{a+b+c}{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B + \operatorname{sen}C} = 2R \\ \frac{abc}{\operatorname{sen}A \cdot \operatorname{sen}B \cdot \operatorname{sen}C} = 8R^3 \end{cases}$$

de manera que, junto con la fórmula de Euler produce

$$\frac{1}{\operatorname{sen}A \operatorname{sen}B} + \frac{1}{\operatorname{sen}B \operatorname{sen}C} + \frac{1}{\operatorname{sen}C \operatorname{sen}A} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B + \operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A \cdot \operatorname{sen}B \cdot \operatorname{sen}C} \geq 4 \Leftrightarrow \\ \frac{a+b+c}{2R} \geq \frac{abc}{8R^3} \Leftrightarrow \frac{2s}{2R} \geq \frac{4Rrs}{8R^3} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

$$[4] \quad \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

Existen varias formas alternativas de demostrar la equivalencia propuesta. Determinaremos el valor de $\cos A + \cos B + \cos C$ en función de R, r, s . Demostraremos el siguiente lema:

Lema: “Con la notación habitual sea A un ángulo de un triángulo, entonces $\cos A$ es una raíz real de la ecuación polinómica siguiente

$$4R^2t^3 - 4R(R+r)t^2 + (s^2 + r^2 - 4R^2)t + (2R+r)^2 - s^2 = 0 \text{ ”.}$$

Para la demostración, consideremos las relaciones $a = 2R \sin A$ (teorema de los senos generalizado) y $s - a = r \cot \frac{A}{2}$ (relacionada con el incentro y el punto de contacto de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo). Utilizando las identidades trigonométricas del ángulo doble, tenemos que

$$s = a + (s - a) = 2R \cdot \sin A + r \cot \frac{A}{2} = 2R \sqrt{(1 - \cos A)(1 + \cos A)} + r \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}$$

y elevando al cuadrado y operando se tiene

$$\begin{aligned} s^2 &= 4R^2(1 - \cos A)(1 + \cos A) + 4Rr(1 + \cos A) + r^2 \cdot \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4R^2(1 - \cos A)^2(1 + \cos A) + 4Rr(1 + \cos A)(1 - \cos A) + r^2(1 + \cos A) - s^2(1 - \cos A) = 0 \end{aligned}$$

de donde, después de manipulaciones algebraicas, llegamos a la relación que queremos

$$4R^2 \cos^3 A - 4R(R + r) \cos^2 A + (s^2 + r^2 - 4R^2) \cos A + (2R + r)^2 - s^2 = 0$$

lo que concluye la demostración del lema. ■

Nota: Claramente, esta relación se cumple también para $\cos B$ y $\cos C$. A partir de las relaciones de Cardano-Vieta entre las raíces y los coeficientes, deducimos las relaciones

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= \frac{R + r}{R} \\ \cos A \cos B + \cos A \cos C + \cos B \cos C &= \frac{s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2} \\ \cos A \cos B \cos C &= \frac{s^2 - (2R + r)^2}{4R^2} \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la primera de estas expresiones, tenemos que

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{R + r}{R} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

lo que concluye la demostración.

$$[5] \quad \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

Utilizando las fórmula del seno del ángulo mitad y la caracterización del problema anterior, es fácil demostrar la equivalencia, ya que

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2} + \frac{1 - \cos C}{2} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ 3 - (\cos A + \cos B + \cos C) &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba.

$$[6] \quad \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

Utilizando de nuevo las fórmulas del seno del ángulo mitad, junto con las caracterizaciones obtenidas del lema relacionadas con [4], tenemos que

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} &\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C)}{8} \leq \frac{1}{64} \Leftrightarrow \\ (1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) &\leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow 1 - (\cos A + \cos B + \cos C) + (\cos A \cos B + \cos B \cos C + \\ + \cos C \cos A) - \cos A \cos B \cos C &\leq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

y sustituyendo por las expresiones deducidas del lema, la última desigualdad es equivalente a

$$1 - \frac{R+r}{R} + \frac{r^2 + s^2 - 4R^2}{4R^2} - \frac{s^2 - (2R+r)^2}{4R^2} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{2r^2}{4R^2} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

lo que termina la demostración.

$$[7] \quad \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

En este caso emplearemos la fórmula de Euler, la fórmula de Herón y la expresión $ab + bc + ca = s^2 + 4Rr + r^2$ ya determinada en [1], obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s} &\Leftrightarrow \frac{(s-b)(s-c) + (s-a)(s-c) + (s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)} \geq \frac{9}{s} \Leftrightarrow \\ \frac{3s^2 - 2(a+b+c)s + ab + bc + ca}{(s-a)(s-b)(s-c)} &\geq \frac{9}{s} \Leftrightarrow (3s^2 - 4s^2 + r^2 + 4Rr + s^2)s \geq 9(s-a)(s-b)(s-c) \\ \Leftrightarrow (4Rr + r^2)s &\geq 9r^2s \Leftrightarrow R \geq 2r \end{aligned}$$

$$[8] \quad \frac{a^2}{r_b r_c} + \frac{b^2}{r_c r_a} + \frac{c^2}{r_a r_b} \geq 4 \Leftrightarrow R \geq 2r$$

En este caso la demostración será un poco más extensa. Utilizaremos las expresiones clásicas $\Delta = r \cdot s = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c)$, junto con uno de los resultados obtenidos del lema [4], $\cos A + \cos B + \cos C = (R+r)/R$, el teorema de los cosenos e identidades algebraicas.

$$\frac{a^2}{r_b r_c} + \frac{b^2}{r_c r_a} + \frac{c^2}{r_a r_b} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a^2(s-b)(s-c)}{r^2 s^2} + \frac{b^2(s-a)(s-b)}{r^2 s^2} + \frac{c^2(s-a)(s-b)}{r^2 s^2} \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$a^2(s-b)(s-c) + b^2(s-a)(s-b) + c^2(s-a)(s-b) \geq 4r^2 s^2 \Leftrightarrow$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)s^2 - (a^2 b + b^2 a + a^2 c + c^2 a + b^2 c + c^2 b)s + abc(a+b+c) \geq 4r^2 s^2$$

Determinaremos el valor de $a^2 b + b^2 a + a^2 c + c^2 a + b^2 c + c^2 b$ en función de R , r y s . Para ello, utilizaremos el teorema de los cosenos aplicado al triángulo de partida, de modo que se tiene

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 a + c^2 a - a^3}{2abc} \rightarrow b^2 a + c^2 a = a^3 + 2abc \cos A$$

Y, de forma análoga, se procede para $\cos B$ y $\cos C$. Entonces es claro que

$$a^2 b + b^2 a + a^2 c + c^2 a + b^2 c + c^2 b = a^3 + b^3 + c^3 + 2abc(\cos A + \cos B + \cos C)$$

Para determinar $a^3 + b^3 + c^3$ en función de R , r y s , emplearemos la identidad

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

con lo que obtenemos

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc + (a+b+c)((a+b+c)^2 - 3ab - 3bc - 3ca) =$$

$$12Rrs + 2s(s^2 - 12Rr - 3r^2) = 2s(s^2 - 6Rr - 3r^2)$$

y entonces

$$a^2 b + b^2 a + a^2 c + c^2 a + b^2 c + c^2 b = a^3 + b^3 + c^3 + 2abc(\cos A + \cos B + \cos C) =$$

$$2s^3 - 12Rrs - 6r^2 s + 8Rrs \cdot \frac{R+r}{R} = 2s^3 - 4Rrs + 2r^2 s = 2s(s^2 - 2Rr + r^2)$$

Finalmente, sustituyendo en la desigualdad inicial, tenemos que

$$(2s^2 - 8Rr - 2r^2)s^2 - 2s^2(s^2 - 2Rr + r^2) + 8Rrs^2 \geq 4r^2 s^2 \Leftrightarrow 4Rr \geq 8r^2 \Leftrightarrow R \geq 2r$$

con lo que termina la demostración.

$$[9] \quad r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a \geq h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \Leftrightarrow R \geq 2r$$

En este caso utilizaremos la fórmula de Euler, la fórmula de Herón y las expresiones $\Delta = r \cdot s = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c)$, junto con otras expresiones alternativas para el área de un triángulo. La desigualdad dada es equivalente a las siguientes

$$\frac{r^2 s^2}{(s-a)(s-b)} + \frac{r^2 s^2}{(s-b)(s-c)} + \frac{r^2 s^2}{(s-c)(s-a)} \geq \frac{4r^2 s^2}{ab} + \frac{4r^2 s^2}{bc} + \frac{4r^2 s^2}{ca} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)} \geq 4 \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} \geq \frac{4(a+b+c)}{abc} \Leftrightarrow \frac{s}{r^2 s} \geq \frac{8s}{4Rrs} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

$$[10] \quad \frac{1}{h_a - 2r} + \frac{1}{h_b - 2r} + \frac{1}{h_c - 2r} \geq \frac{3}{r} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

En este caso la equivalencia es fácil de demostrar ya que

$$\frac{1}{h_a - 2r} + \frac{1}{h_b - 2r} + \frac{1}{h_c - 2r} \geq \frac{3}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{2rs}{a} - 2r} + \frac{1}{\frac{2rs}{b} - 2r} + \frac{1}{\frac{2rs}{c} - 2r} \geq \frac{3}{r} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2r\left(\frac{s}{a} - 1\right)} + \frac{1}{2r\left(\frac{s}{b} - 1\right)} + \frac{1}{2r\left(\frac{s}{c} - 1\right)} \geq \frac{3}{r} \Leftrightarrow \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \geq 6$$

y a partir de aquí, se procede como en la demostración de la equivalencia [1].

3.- Algunas desigualdades que refinan la desigualdad de Euler-Chapple

En este apartado, incluiremos 4 problemas relativamente recientes propuestos en la legendaria revista *American Mathematical Monthly*, (o brevemente *AMM*) relacionados con la desigualdad de Euler-Chapple. Su interés es debido a que refinan sustancialmente dicha desigualdad y nos proporcionan ciertas ideas para abordar otras desigualdades semejantes. Para cada uno de ellos emplearemos una traducción libre del inglés por parte del autor, junto con la solución única propuesta en dicha revista, salvo en el problema 11245 en la que el autor de este artículo (debido a que su solución enviada a *AMM* coincidía plenamente con la aparecida en la revista), propone la solución que envió a la misma. Por otra parte, se expondrán algunos comentarios que los editores de *AMM* hicieron sobre el problema en cuestión, y que afinan todavía más su propio contenido, junto con otros propios del autor. Presentamos ya estos cuatro problemas, no necesariamente por orden cronológico, y en todo caso, salvo variaciones triviales en su presentación y con sus referencias completas.

Problem 10644 [1998, 175] Proposed by Mihály Bencze, Brazov, Romania.

Dado un triángulo acutángulo con lados de longitudes a , b y c , radio de la circunferencia inscrita r y radio de la circunferencia circunscrita R , demostrar que

$$\frac{r}{2R} \leq \frac{abc}{\sqrt{2(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}}$$

Solución del grupo *GCHQ*, Cheltenham, England.

Claramente, aplicando el teorema de los cosenos y teniendo en cuenta que el triángulo es acutángulo, tenemos que

$$a^2 - (b^2 + c^2)(1 - \cos A) = b^2 + c^2 - 2bc \cos A - (b^2 + c^2)(1 - \cos A) = (b - c)^2 \cos A \geq 0$$

Entonces, utilizando las fórmulas del ángulo mitad, podemos escribir que

$$a^2 \geq (b^2 + c^2)(1 - \cos A) = 2(b^2 + c^2) \sin^2 \frac{A}{2}$$

y expresiones análogas $b^2 \geq 2(a^2 + c^2) \sin^2 \frac{B}{2}$, y $c^2 \geq 2(a^2 + b^2) \sin^2 \frac{C}{2}$.

Multiplicando ahora estas desigualdades, llegamos a

$$a^2 b^2 c^2 \geq 8(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$$

y, en consecuencia

$$\frac{abc}{\sqrt{2(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}} \geq 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Finalmente, teniendo en cuenta la identidad $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, llegamos al resultado requerido.

Nota 1 (AMM): Varios resolutores del problema notaron que la igualdad surge cuando el triángulo es equilátero y que el resultado también es válido cuando el triángulo no es acutángulo.

Nota 2 (Autor): La desigualdad pedida se puede reescribir trivialmente en la forma

$$\frac{r}{2R} \leq \frac{abc}{\sqrt{2(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}} \Leftrightarrow \frac{R}{2r} \geq \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}}{4abc}$$

Y, a partir de la desigualdades entre la media cuadrática y la media aritmética, y la media aritmética y la media geométrica, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{R}{2r} &\geq \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}}{4abc} \geq \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{c+a}{2}}{4abc} = \\ &\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} \geq 1 \end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad de Euler-Chapple.

Problem 11245 [2006, 760] Proposed by Cezar Lupu, University of Bucharest, Bucharest, Romania, and Tudorel Lupu, Decebal High-School, Constanza, Romania

Consideremos un triángulo acutángulo con lados de longitudes a, b, c , con radio de la circunferencia inscrita r y radio de la circunferencia circunscrita R . Demostrar que

$$\frac{r}{R} \leq \frac{\sqrt{2(2a^2 - (b-c)^2)(2b^2 - (c-a)^2)(2c^2 - (a-b)^2)}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Solución de Vicente Vicario García, Huelva, España.

Usaremos la notación habitual en la geometría del triángulo, junto con la conocida identidad

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

A partir del teorema de los cosenos aplicado al triángulo ABC , es claro que

$$2c^2 - (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \cos C \geq (a+b)^2 (1 - \cos C)$$

y utilizando las fórmulas del ángulo mitad, tenemos que

$$\begin{aligned} 2c^2 - (a-b)^2 &\geq (a+b)^2 (1 - \cos C) = 2(a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} \\ 2b^2 - (a-c)^2 &\geq (a+c)^2 (1 - \cos B) = 2(a+c)^2 \sin^2 \frac{B}{2} \\ 2a^2 - (b-c)^2 &\geq (b+c)^2 (1 - \cos A) = 2(b+c)^2 \sin^2 \frac{A}{2} \end{aligned}$$

y, multiplicando estas desigualdades, entonces

$$\prod_{\text{cíclico}} (2a^2 - (b-c)^2) \geq 8(a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}$$

llegando fácilmente a la desigualdad pedida

$$\frac{r}{R} \leq \frac{\sqrt{2(2a^2 - (b-c)^2)(2b^2 - (c-a)^2)(2c^2 - (a-b)^2)}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Nota 1 (AMM): El resultado sigue siendo válido para triángulos no acutángulos, pero las demostraciones que se presentaron requerían de asistentes informáticos y eran mucho más largas.

Nota 2 (Autor): La desigualdad demostrada es trivialmente equivalente a la siguiente

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2(2a^2 - (b-c)^2)(2b^2 - (c-a)^2)(2c^2 - (a-b)^2)}}$$

y, a partir de la desigualdad clásica $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, llegamos a esta otra

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{8}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left[2 - \left(\frac{b-c}{a}\right)^2\right] \left[2 - \left(\frac{c-a}{b}\right)^2\right] \left[2 - \left(\frac{a-b}{c}\right)^2\right]}} \geq \frac{8}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 1$$

lo que demuestra la desigualdad de Euler-Chapple.

Problem 11240 [2006, 655] *Proposed by Pál Péter Dálay, Déak Ferenc HighSchool, Szeged, Hungary.*

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo y sean R y r , los radios de sus circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{R}{2r} \geq e^{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^2 \right]}$$

Solución de A. K. Shafie, IASBS, Zanjan, Irán.

Utilizaremos la notación habitual en la geometría del triángulo. Considerando sobre el lado de un triángulo las longitudes de los segmentos que deja el punto de contacto de la circunferencia inscrita sobre el mismo, y empleando expresiones trigonométricas elementales, tenemos que

$$\begin{aligned} a &= r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right) = r \cdot \frac{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r \cdot \sin \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right)}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{r \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right)}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{r \cdot \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \rightarrow r = a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2} = 2R \sin A \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Es sencillo demostrar, a partir del cálculo diferencial, que $e^x \leq \frac{1}{1-x}$, $\forall x \in [0,1)$,

y como $0 \leq \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 < 1$, entonces

$$1 - \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos C - a^2 - b^2 + 2ab}{c^2} = \frac{2ab(1 - \cos C)}{c^2} = \frac{4ab \sin^2 \frac{C}{2}}{c^2}$$

y, en consecuencia, tenemos que

$$e^{\left[\left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^2\right]} \leq \frac{c^2}{4absen^2 \frac{C}{2}} \cdot \frac{b^2}{4acsen^2 \frac{B}{2}} \cdot \frac{c^2}{4bc sen^2 \frac{A}{2}} = \frac{R^2}{4r^2}$$

Finalmente, extrayendo raíces cuadradas, obtenemos el resultado pedido.

Nota 1 (Autor): De la desigualdad se deduce trivialmente que $R \geq 2r$. Notemos el carácter un tanto sorprendente de la misma al aparecer la función exponencial, refinando la desigualdad de Euler-Chapple.

Problem 11195 [2006, 79] *Proposed by Marian Tetiva, Bârlad, Romania.*

Sean a, b, c longitudes de los lados de un triángulo y sean R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita al triángulo, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{R}{2r} \geq \left[\frac{4a^2}{4a^2 - (b-c)^2} \cdot \frac{4b^2}{4b^2 - (a-c)^2} \cdot \frac{4c^2}{4c^2 - (a-b)^2} \right]^2$$

Solución de Pál Péter Dályay, Hungría.

Sea s el semiperímetro del triángulo. Son bien conocidas las expresiones

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad \text{y} \quad r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Aplicando ahora la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, tenemos que

$$4a^2 - (b-c)^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 - (b-c)^2 = \\ a^2 + a^2 + a^2 + 4(s-b)(s-c) \geq 4 \cdot \sqrt[4]{4a^6(s-b)(s-c)}$$

y análogamente para $4b^2 - (c-a)^2$, y $4c^2 - (a-b)^2$. Entonces es claro que

$$\left[\frac{4a^2}{4a^2 - (b-c)^2} \cdot \frac{4b^2}{4b^2 - (a-c)^2} \cdot \frac{4c^2}{4c^2 - (a-b)^2} \right]^2 \leq \left(\frac{a^2 b^2 c^2}{\sqrt[4]{64a^6 b^6 c^6 (s-a)^2 (s-b)^2 (s-c)^2}} \right)^2 = \\ \frac{abc}{8(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{R}{2r}$$

lo que demuestra la proposición.

Nota 1(Autor): Es obvio que de la desigualdad demostrada se deduce que $R \geq 2r$.

Nota 2(AMM): C. R. Pranesackar demostró la desigualdad más fuerte siguiente

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{2a^2}{2a^2 - (b-c)^2} \cdot \frac{2b^2}{2b^2 - (c-a)^2} \cdot \frac{2c^2}{2c^2 - (a-b)^2} \geq \left(\frac{4a^2}{4a^2 - (b-c)^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{4b^2}{4b^2 - (c-a)^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{4c^2}{4c^2 - (a-b)^2} \right)^2$$

La primera desigualdad se puede demostrar de forma similar a la anterior, utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. De esta forma, tenemos que

$$2a^2 - (b-c)^2 = a^2 + 4(s-b)(s-c)$$

y la segunda desigualdad se demuestra a partir del hecho de que

$$\frac{2a^2}{2a^2 - (b-c)^2} \geq \left(\frac{4a^2}{4a^2 - (b-c)^2} \right)^2 \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$$

Nota 3(AMM): Una generalización fue dada por Y. Dumont quien mostró que si $0 < d < 1$, entonces la función $f_d(x) = \left(1 - \frac{d}{x}\right)^{-x}$ es decreciente para $x > d$. Poniendo ahora $d_1 = \left(\frac{b-c}{a}\right)^2$, $d_2 = \left(\frac{c-a}{b}\right)^2$, $d_3 = \left(\frac{a-b}{c}\right)^2$, tenemos que

$$\left(\frac{R}{2r}\right)^2 = f_{d_1}(1) \cdot f_{d_2}(1) \cdot f_{d_3}(1) > f_{d_1}(x) \cdot f_{d_2}(x) \cdot f_{d_3}(x), \quad \forall x > 1$$

Tomando las raíces cuadradas de ambos miembros cuando $x = 4$, entonces llegamos a la desigualdad pedida, y tomando raíces cuadradas cuando $x = 2$, obtenemos la desigualdad de Pranesackar, más fuerte que la anterior.

4.- Generalizaciones de la desigualdad. Algunas reflexiones

Expondremos aquí algunos comentarios y reflexiones que se pueden obtener analizando la desigualdad de Euler-Chapple y sus generalizaciones. Pero antes de llevarlo a cabo, creemos que es importante presentar una de las demostraciones más simples, elegantes y sorprendentes de esta desigualdad. Aparece en el libro “*Maxima and minima without calculus*” de Ivan Niven.

Demostración (I. Niven): Esta es una demostración muy simple conceptualmente. Sean L, M, N los puntos medios de los lados BC, CA y AB , respectivamente, de un triángulo ABC . Sabemos que el triángulo LMN es semejante al triángulo ABC y que la longitud de cada uno de sus lados es exactamente la mitad de la longitud correspondiente a los lados del triángulo ABC . Sea R el radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC , entonces $R/2$ será el radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo LMN . Pero, por otra parte, es sabido que la circunferencia inscrita al triángulo ABC es la de menor radio y tal que tiene un punto en común con cualquiera de los tres lados. En

consecuencia, tenemos que $r \leq R/2$. Además, la igualdad se produce si y sólo si la circunferencia circunscrita al triángulo LMN es tangente a todos los lados del triángulo ABC , y por tanto, es la circunferencia inscrita de ABC . No es difícil ver que en este caso, el triángulo ABC es equilátero. ■

Otra demostración particularmente breve (válida para triángulos acutángulos) es la que recurre al teorema de Erdős-Mordell y al teorema de Carnot. Si particularizamos como punto interior P en la desigualdad de Erdős-Mordell al circuncentro del mismo, y teniendo en cuenta el famoso teorema de Carnot, entonces

$$AP + BP + CP \geq 2 \cdot (PD + PE + PF) \Leftrightarrow R + R + R \geq 2 \cdot (R + r) \Leftrightarrow R \geq 2r$$

Por otra parte, dos continuaciones naturales de la desigualdad de Euler-Chapple son las relacionadas con los cuadriláteros bicéntricos, es decir aquellos que admiten circunferencia inscrita y circunferencia circunscrita (y en general, con cualquier polígono convexo que admita circunferencia inscrita y circunscrita a la vez) y la relacionada con la desigualdad de Euler para tetraedros.

En relación con la primera tenemos que mencionar el teorema sobre cuadriláteros bicéntricos de Fuss (discípulo de Euler) aparecido en *Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae* 13, 1795-1796. La distancia $d = OI$ entre el circuncentro y el incentro de un triángulo ya había sido determinada por Chapple y por Euler y viene dada por $d^2 = R^2 - 2Rr$, que se puede reescribir en la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d}$$

El teorema de Fuss para cuadriláteros bicéntricos, afirma que se cumple la siguiente relación, siendo d la distancia entre los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita al cuadrilátero: $d^4 - 2(R^2 + r^2)d^2 + R^4 - 2R^2r^2 = 0$, que se puede reescribir en la forma equivalente

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}$$

Observemos la enorme semejanza entre la igualdad para cuadriláteros bicéntricos (Fuss) y la igualdad para triángulos (Euler-Chapple). A este respecto, es interesante también observar que existe una *desigualdad de Fuss* para cuadriláteros bicéntricos. Podemos obtenerla fácilmente a partir de la relación anterior, simplemente resolviendo la ecuación bicuadrada asociada e imponiendo condiciones elementales

$$\begin{aligned} d^4 - 2(R^2 + r^2)d^2 + R^4 - 2R^2r^2 = 0 &\Leftrightarrow d^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2} \geq 0 &\Leftrightarrow (R^2 + r^2)^2 \geq r^2(4R^2 + r^2) \Leftrightarrow R^4 \geq 2R^2r^2 \Leftrightarrow R \geq \sqrt{2} \cdot r \end{aligned}$$

siendo esta última $R \geq \sqrt{2} \cdot r$, la análoga a la desigualdad de Euler-Chapple para cuadriláteros bicéntricos.

Analicemos ahora la extensión de la desigualdad de Euler-Chapple para tetraedros. Según D. Francisco Bellot, editor de la revista OIM, en su artículo sobre “*Geometría del tetraedro*” (OIM, 32, pág 7) mientras en el triángulo existe una relación bien conocida que relaciona la distancia entre el circuncentro y el incentro con los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, a saber, $OI^2 = R(R - 2r)$, en el tetraedro no ocurre lo mismo, salvo que se impongan condiciones especiales. En Mathesis, 1924, (pág 256), Cl. Servais demostraba que, en general, no existe tal relación, refutando la afirmación hecha un siglo antes por Durrande (que junto con Fuss se le considera el descubridor de la relación en el cuadrilátero bicéntrico ya comentada). Cuando el tetraedro es tal que un vértice del mismo, digamos A , su incentro I y su circuncentro O , están alineados, entonces se tiene que

$$OI^2 = (R + r)(R - 3r)$$

de donde se deduce trivialmente la desigualdad de Euler-Chapple $R \geq 3r$ para este tipo de tetraedros. Por otra parte, la anterior demostración de I. Niven de la desigualdad de Euler-Chapple para el triángulo, puede generalizarse fácilmente al espacio tridimensional para todos los tetraedros. Muy recientemente en *Mathematical Reflections* 1 (2009), Nguyen Tien Lam propone una demostración de la desigualdad $R \geq 3r$ para tetraedros, demostrando que se tiene

$$OI^2 = R^2 - r^2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{(A_i A_j)^2}{h_i h_j}$$

donde R y r son los radios respectivos de las esferas circunscrita e inscrita al tetraedro, $A_i A_j$ es la distancia entre los vértices A_i y A_j con $1 \leq i < j \leq 4$, y h_i es la distancia desde el vértice A_i , con $i = 1, 2, 3, 4$ a su cara opuesta. Tien Lam concluye la demostración de la desigualdad generalizada para tetraedros, probando que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \frac{(A_i A_j)^2}{h_i h_j} \geq 9$$

de donde se deduce inmediatamente el resultado $R \geq 3r$. Existe otro artículo muy reciente, esta vez sobre desigualdades angulares en el tetraedro[†]. El autor M. Chen, hacia el final del artículo, indica que el análogo a la desigualdad para triángulos

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4}$$

que como puede demostrarse fácilmente por los métodos que se han expuesto en este artículo es equivalente a la desigualdad de Euler, ya que

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos A}{2} + \frac{1 + \cos B}{2} + \frac{1 + \cos C}{2} \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

[†] En la misma revista digital *Mathematical Reflections* 6 (2008) aparece el artículo “*Angle Inequalities in Tetrahedra*” de Mark Chen en el que se analizan algunas desigualdades en el tetraedro.

$$3 + (\cos A + \cos B + \cos C) \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{R+r}{R} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow R \geq 2r$$

es la desigualdad $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \cos^2 \frac{f_{ij}}{2} \leq 4$ para tetraedros, donde f_{ij} denota el ángulo diedral entre las caras f_i y f_j , que son las respectivamente opuestas a los vértices A_i y A_j del mismo. Sería muy interesante demostrar si a partir de esta última desigualdad se puede obtener la desigualdad de Euler-Chapple para tetraedros.

Bibliografía

- [1] Hofmann, *Historia de la Matemática*, manuales Uteha, nº 32, Mexico, 1961
- [2] M. Amengual, *La desigualdad de Euler a partir de otras desigualdades entre elementos de un triángulo*. Revista digital OIM, Partes I y II, 2003
- [3] Problema 10644 de *AMM*, 1998, 175
- [4] Problema 11245 de *AMM*, 2006, 760
- [5] Problema 11240 de *AMM*, 2006, 655
- [6] Problema 11195 de *AMM*, 2006, 79