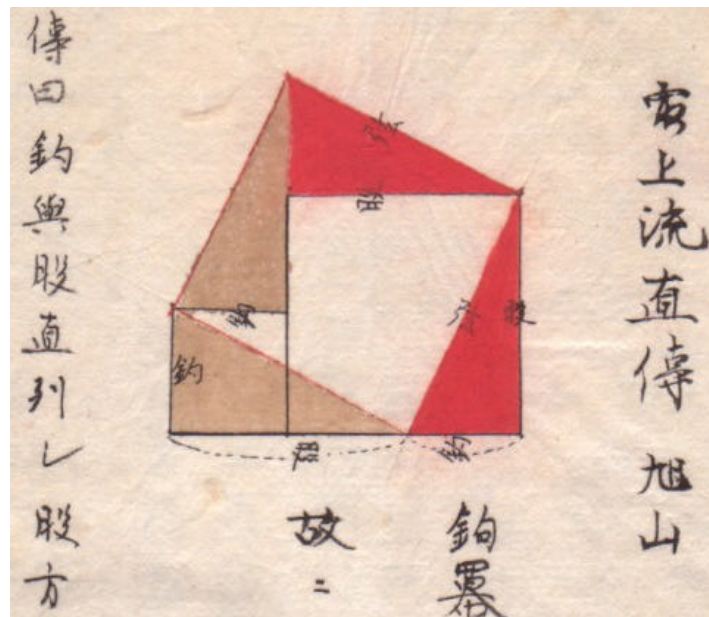


10 problemes Sangaku amb triangles



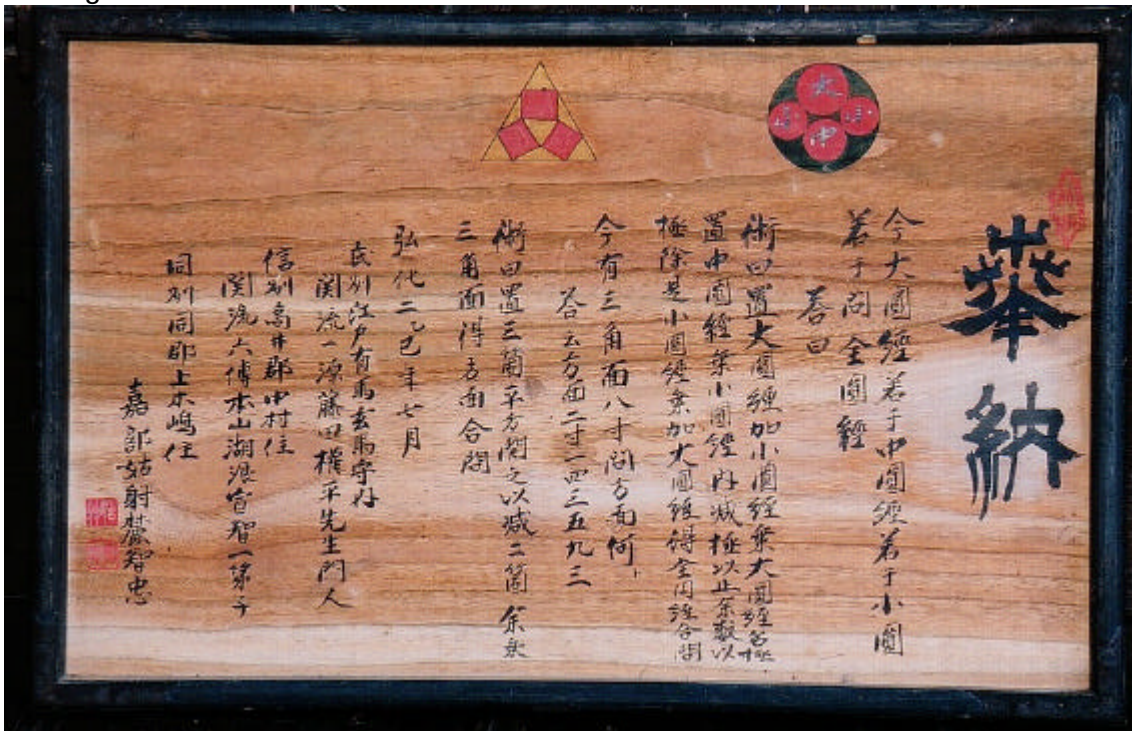
Ricard Peiró i Estruch
Gener 2009

Introducció

Els Sangaku són unes taules de fusta amb enunciats de problemes de geometria euclídea creats al Japó en el període Edo 1603-1867. En aquest període el Japó estava aïllat d'occident. Aquestes taules estaven exposades als temples budistes.



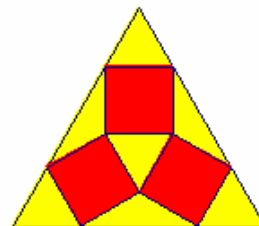
Els 10 problemes escollits pertanyen a taules de la prefectura de Nagano i la seua temàtica principal són triangles. Els problemes són de distint grau de complexitat i d'una gran bellesa de colors i formes.



Enunciats

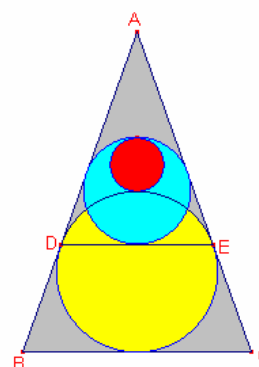
Problema 1

La següent figura està formada per 1 triangle equilàter i 3 quadrats iguals. El costat del triangle equilàter és a . Calculeu el costat del quadrat.



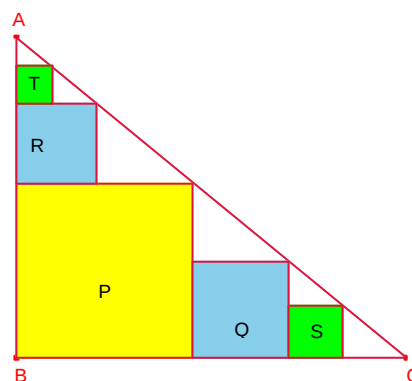
Problema 2

Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Siga la seua circumferència inscrita de centre O_1 i radi r_1 . Siguen D, E els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats $\overline{AB}, \overline{AC}$ del triangle. Siga la circumferència inscrita al triangle $\triangle ADE$ de centre O_2 i radi r_2 . Considerem la circumferència de centre O_3 i radi r_3 . Determineu el valor de r_2 en termes de r_3 .



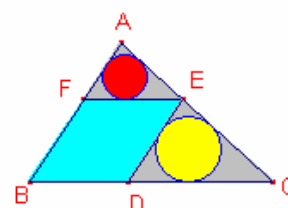
Problema 3

En el triangle rectangle $\triangle ABC$, $B = 90^\circ$, s'han inscrit els quadrats P, Q, R, S, T (veure figura). Si els costats dels quadrats S, T són a, b , respectivament, calculeu el costat del quadrat P .



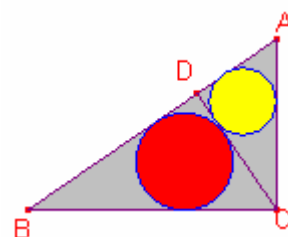
Problema 4

El rombe $BDEF$ està inscrit en el triangle $\triangle ABC$. Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle AFE$ i s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle DCE$. Determineu r en funció de s i dels costats a, c .



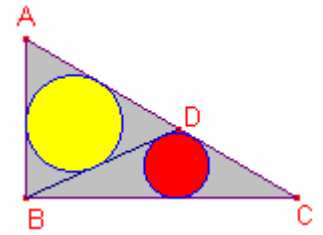
Problema 5

En el triangle rectangle $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$, siga $\overline{CD}$ l'altura sobre la hipotenusa. Siguen coneguts els catets del triangle. Determineu els radis de les circumferències inscrites als triangles rectangles $\triangle ADC$, $\triangle BCD$.



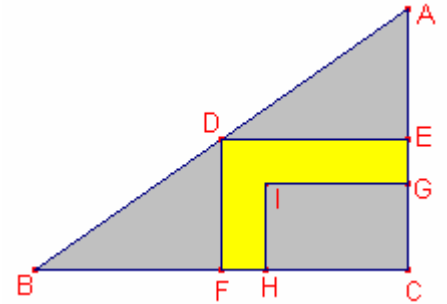
Problema 6

Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $B = 90^\circ$. Siga D un punt de la hipotenusa $\overline{AC}$. Siga r_1 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABD$ i r_2 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle BCD$.
Determineu el radi r_1 en funció de r_2 i dels catets $a = \overline{BC}$ i $c = \overline{AB}$.



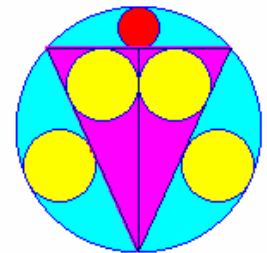
Problema 7

Donat el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, tal que els triangles $\triangle ADE$, $\triangle DAF$, i el rectangle HCGI tenen la mateixa àrea. Si $x = \overline{FH} = \overline{GE}$, determineu x en funció dels catets del triangle rectangle $\triangle ABC$.



Problema 8

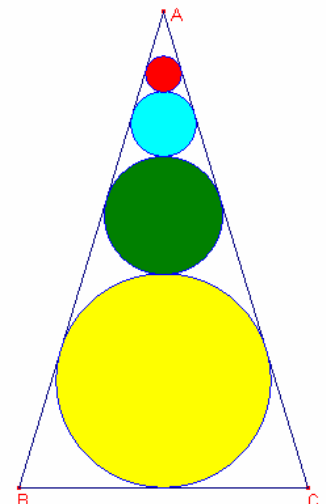
En la següent figura el triangle és isòsceles i està inscrit en una circumferència de radi R. Hi ha 4 circumferències iguals de radi r i una circumferència més menuda de radi s.
Calculeu els radis de les circumferències r i s en funció de R radi de la circumferència major.



Problema 9

Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ constant. Siga la seua circumferència inscrita de centre O_1 i radi r_1 . Una circumferència de centre O_2 i radi r_2 és tangent als costats del triangle $\overline{AB}, \overline{AC}$ i tangent exterior al la circumferència anterior. Així es construeixen n circumferència.

Si n és constant i $x = \overline{BC}$ variable.
Per a quin valor de x el radi r_n és màxim.

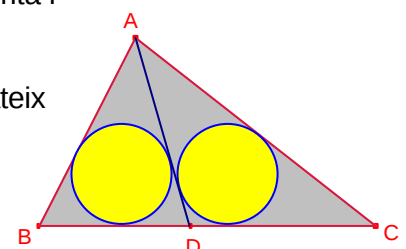


Problema 10

Siga el triangle $\triangle ABC$ qualsevol i r el radi de la circumferència inscrita i h_a l'altura sobre el costat $\overline{BC}$.

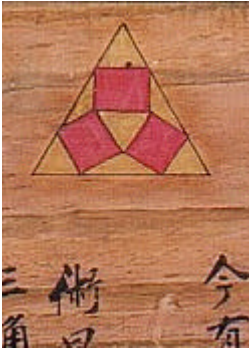
Les circumferències inscrites als triangles $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ tenen el mateix radi r_1 .

Determineu r_1 en termes de r i h_a .

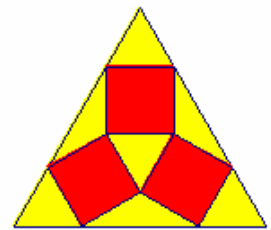


Solucions

Problema 1



La següent figura està formada per 1 triangle equilàter i 3 quadrats iguals. El costat del triangle equilàter és a . Calculeu el costat del quadrat.



Solució:

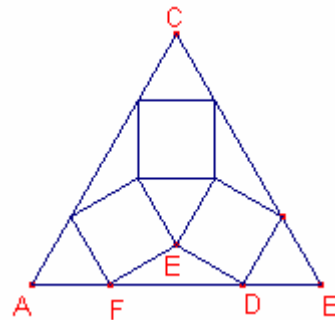
Siga el triangle equilàter $\triangle ABC$ de costat a .

Siga $x = \overline{DE} = \overline{BD}$ costat del quadrat.

$\angle EDF = 30^\circ$. Aleshores, $\overline{DF} = \sqrt{3}x$.

$a = 2x + \sqrt{3}x = (2 + \sqrt{3})x$.

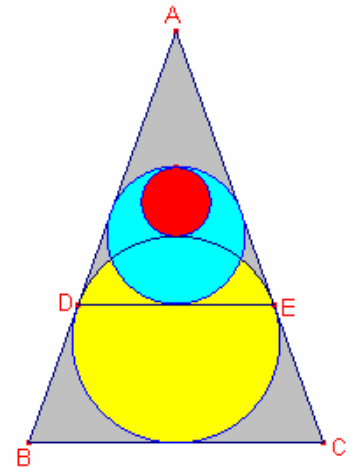
Aleshores, $x = (2 - \sqrt{3})a$.



Problema 2



Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Siga la seua circumferència inscrita de centre O_1 i radi r_1 . Siguen D, E els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats $\overline{AB}, \overline{AC}$ del triangle. Siga la circumferència inscrita al triangle $\triangle ADE$ de centre O_2 i radi r_2 . Considerem la circumferència de centre O_3 i radi r_3 . Determineu el valor de r_2 en termes de r_3 .



Solució:

Siga H el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{DE}$.

Siga $\alpha = \angle DAM = \angle MDO_1$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle MDO_1$:

$\overline{DM} = r_1 \cos \alpha$. Per tant, $\overline{DE} = 2r_1 \cos \alpha$. $\overline{MO}_1 = r_1 \sin \alpha$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ADO_1$:

$\overline{AO}_1 = \frac{r_1}{\sin \alpha}$, $\overline{AD} = \frac{r_1}{\tan \alpha}$.

Aleshores,

$\overline{AM} = \overline{AO}_1 - \overline{MO}_1 = \frac{r_1}{\sin \alpha} - r_1 \sin \alpha$.

Calculant l'àrea del triangle $\triangle ADE$:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \overline{DE} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{2} 2r_1 \cos \alpha \cdot \left(\frac{r_1}{\sin \alpha} - r_1 \sin \alpha \right) = r_1^2 \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha \right).$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} (2\overline{AD} + \overline{DE}) r_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2r_1}{\tan \alpha} + 2r_1 \cos \alpha \right) r_2 = r_1 r_2 \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \cos \alpha \right).$$

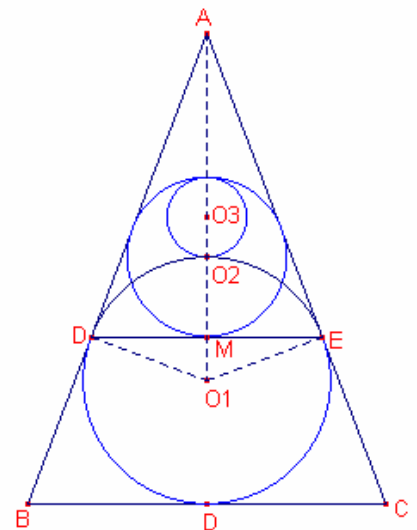
Igualant les àrees:

$$r_1^2 \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha \right) = r_1 r_2 \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \cos \alpha \right). \text{ Simplificant:}$$

$$r_1 \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \cos \alpha \right) = r_2 \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos \alpha \right).$$

Aïllant r_2 :

$$r_2 = \frac{\cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} r_1 = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} r_1 = (1 - \sin \alpha) r_1.$$



Aleshores,

$$r_2 = (1 - \sin \alpha) r_1 = r_1 - \overline{MO_1}.$$

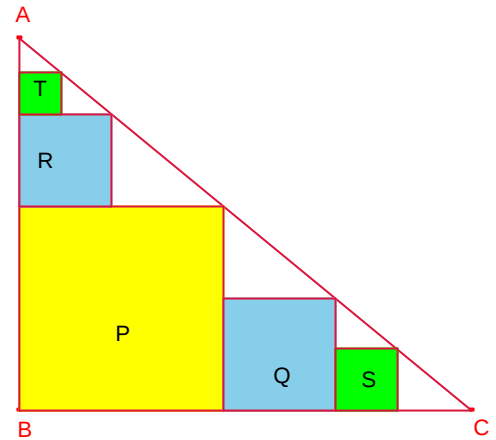
Aleshores, el centre de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ADE$ pertany a la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$.

Aleshores, $r_2 = 2r_3$.

Problema 3



En el triangle rectangle $\triangle ABC$, $B = 90^\circ$, s'han inscrit els quadrats P, Q, R, S, T (veure figura). Si els costats dels quadrats S, T són a, b, respectivament, calculeu el costat del quadrat P.



Solució:

Siga x el costat del quadrat P.

Siga y el costat del quadrat Q.

Siga z el costat del quadrat R.

Els triangles rectangles $\triangle DEF$, $\triangle FGH$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{y-a} = \frac{y}{x-y} \text{ . Aleshores, } y^2 = ax \quad (1)$$

Els triangles rectangles $\triangle FGH$, $\triangle HIJ$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{y}{x-y} = \frac{x-z}{z} \text{ . Aleshores, } z = x - y \quad (2)$$

Els triangles rectangles $\triangle JKL$, $\triangle HIJ$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x-z}{z} = \frac{z-b}{b} \text{ . Aleshores, } b(x-z) = z(z-b) \quad (3)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (3):

$$b(x - x - y) = (x - y)(x - y - b) \text{ .}$$

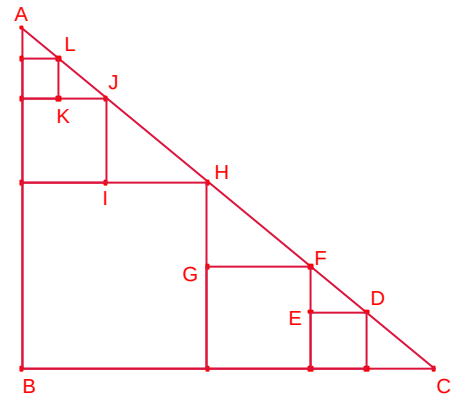
$y^2 - 2xy + x^2 - bx = 0$. Resolent l'equació en la incògnita y:

$$y = x - \sqrt{bx} \quad (4)$$

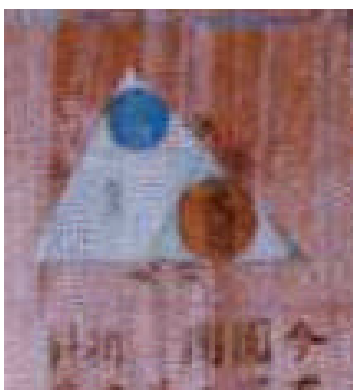
Igualant les expressions (1) i (4):

$$ax = (x - \sqrt{bx})^2 \text{ . Resolent l'equació en la incògnita x:}$$

$$x = a + b + 2\sqrt{ab} \text{ .}$$



Problema 4



El rombe BDEF està inscrit en el triangle $\triangle ABC$ siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle AFE$ i s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle DCE$.
Determineu r en funció de s i dels costats a , c .

Solució:

Siga $x = \overline{BD} = \overline{BF}$ el costat del rombe.

Els triangles $\triangle AFE$, $\triangle DCE$ són semblants aplicant el teorema de Tales:

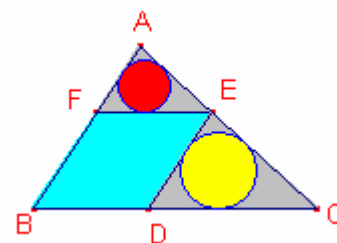
$$\frac{r}{s} = \frac{x}{a-x}, \text{ aleshores, } r = \frac{x}{a-x}s \quad (1)$$

Els triangles $\triangle AFE$, $\triangle ABC$ són semblants aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{c-x}, \text{ aleshores, } x = \frac{ac}{a+c} \quad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1) i simplificant:

$$r = \frac{cs}{a}.$$



Problema 5

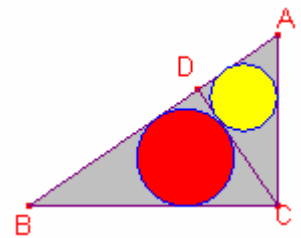


En el triangle rectangle $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$, siga $\overline{CD}$ l'altura sobre la hipotenusa. Siguen coneguts els catets del triangle. Determineu els radis de les circumferències inscrites als triangles rectangles $\triangle ADC$, $\triangle BCD$.

Solució:

Siguen els catets $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$

Siguen r , s els radis de les circumferències inscrites als triangles rectangles $\triangle ADC$, $\triangle BCD$, respectivament.



Aplicant el teorema del catet al triangle rectangle $\triangle ABC$:

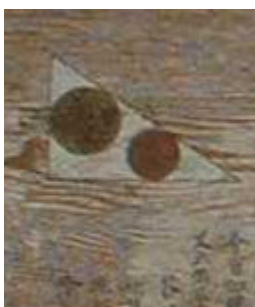
$$b^2 = \overline{AH} \cdot c, \text{ aleshores, } \overline{AH} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad a^2 = \overline{BH} \cdot c, \text{ aleshores, } \overline{BH} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

El radi de la circumferència inscrita a un triangle rectangle és igual al semiperímetre menys la hipotenusa, aleshores:

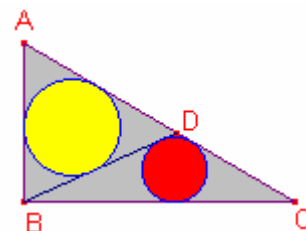
$$r = \frac{\overline{AC} + \overline{AD} + \overline{CD}}{2} - \overline{AC}, \quad r = \frac{b + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{2} - b = \frac{-b\sqrt{a^2 + b^2} + b^2 + ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\text{Anàlogament, } s = \frac{-a\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Problema 6



Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $B = 90^\circ$. Siga D un punt de la hipotenusa $\overline{AC}$. Siga r_1 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABD$ i r_2 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle BCD$. Determineu el radi r_1 en funció de r_2 i dels catets $a = \overline{BC}$ i $c = \overline{AB}$.



Solució:

Siga O_1 el centre de la circumferència

inscrita al triangle $\triangle ABD$ de radi r_1 .

Siga O_2 el centre de la circumferència

inscrita al triangle $\triangle BCD$ de radi r_2 .

Considerem la circumferència inscrita al

triangle $\triangle ABC$ de centre I i radi r .

Siga D, E els punts de tangència de la

circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$ i els costats a , c respectivament.

Siga M el punt de tangència de la

circumferència inscrita al triangle $\triangle ABD$ i el costat c .

Siga N el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\triangle BCD$ i el costat a .

Els triangles $\triangle AMO_1$, $\triangle AEI$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AM}}{c-r} = \frac{r_1}{r}. \text{ Aleshores, } \overline{AM} = \frac{r_1(c-r)}{r}. \quad \overline{BM} = c - \frac{r_1(c-r)}{r} \quad (1)$$

Els triangles $\triangle CNO_2$, $\triangle CDI$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

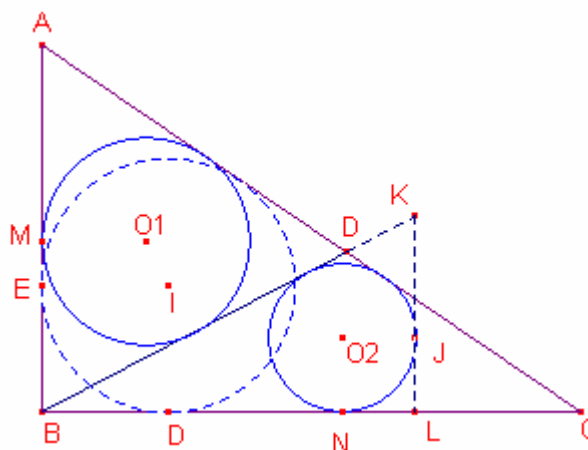
$$\frac{\overline{CN}}{a-r} = \frac{r_2}{r}. \text{ Aleshores, } \overline{CN} = \frac{r_2(a-r)}{r}. \quad \overline{BN} = a - \frac{r_2(a-r)}{r} \quad (2)$$

Considerem el triangle rectangle $\triangle BLK$, $L = 90^\circ$ tal que la circumferència de centre O_2 i radi r_2 és inscrita al triangle. Siga J el punt de tangència del costat $\overline{KL}$ i la circumferència.

$$\overline{BK} = \overline{BN} + \overline{KJ}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle BLK$:

$$(\overline{BN} + \overline{KJ})^2 = (\overline{BN} + r_2)^2 + (\overline{KJ} + r_2)^2. \text{ Aïllant } \overline{KJ}.$$



$$\overline{KJ} = \frac{(\overline{BN} + r_2)r_2}{\overline{BN} - r_2} \quad (3)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (3):

$$\overline{KJ} = \frac{r_2(ar - ar_2 + 2r_2r)}{a(r - r_2)} \quad (4)$$

Els triangles $\triangle BMO_1$, $\triangle KJO_2$ són semblants aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BM}}{r_1} = \frac{\overline{KJ}}{r_2} \quad (5)$$

Substituint les expressions (1) (4) en l'expressió (5):

$$\frac{\frac{cr - r_1(c - r)}{r}}{r_1} = \frac{\frac{r_2(ar - ar_2 + 2r_2r)}{a(r - r_2)}}{r_2}.$$

Simplificant:

$$ac(r^2 - rr_1 - rr_2 + r_2r_1) = 2r^2r_2r_1 \quad (6)$$

Aïllant r_1

$$r_1 = \frac{ac(r^2 - rr_2)}{2r^2r_2 + ac(r - r_2)} \quad (7)$$

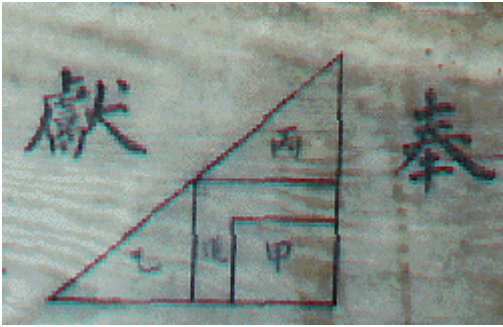
El radi de la circumferència inscrita del triangle rectangle és igual al semiperímetre menys la hipotenusa:

$$r = \frac{a + c + \sqrt{a^2 + c^2}}{2} - \sqrt{a^2 + c^2} = \frac{a + c - \sqrt{a^2 + c^2}}{2} \quad (8)$$

Substituint l'expressió (8) en l'expressió (7) i simplificant:

$$r_1 = \frac{ac(a + c - \sqrt{a^2 + c^2})}{2(ac - 2r_2\sqrt{a^2 + c^2})}.$$

Problema 7



Donat el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$, tal que els triangles $\triangle ADE$, $\triangle DAF$, i el rectangle HCGI tenen la mateixa àrea. Si $x = \overline{FH} = \overline{GE}$, determineu x en funció dels catets del triangle rectangle $\triangle ABC$.

Solució:

Siga $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$.

Si els triangles $\triangle ADE$, $\triangle DAF$ tenen la mateixa àrea, aleshores, $\overline{BF} = \frac{1}{2}a$, $\overline{AE} = \frac{1}{2}b$.

L'àrea del triangle $\triangle ADE$ és $S_{ADE} = \frac{ab}{8}$.

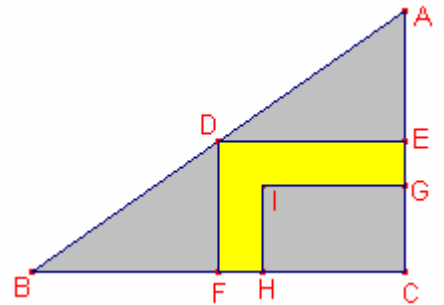
$$\overline{HC} = \frac{a}{2} - x, \quad \overline{CG} = \frac{b}{2} - x.$$

L'àrea del rectangle HCGI és:

$$S_{HCGI} = \left(\frac{a}{2} - x\right) \left(\frac{b}{2} - x\right), \quad S_{HCGI} = S_{ADE}. \text{ Aleshores:}$$

$$\left(\frac{a}{2} - x\right) \left(\frac{b}{2} - x\right) = \frac{ab}{8}. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } x:$$

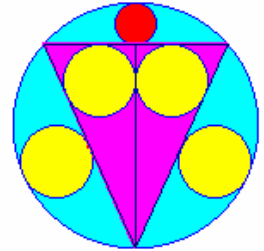
$$x = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{4}.$$



Problema 8



En la següent figura el triangle és isòsceles i està inscrit en una circumferència de radi R . Hi ha 4 circumferències iguals de radi r i una circumferència més menuda de radi s .
Calculeu els radis de les circumferències r i s en funció de R radi de la circumferència major.



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$ $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AB} = \overline{AC}$.

Siga $h = \overline{AD}$ altura del triangle. Siga $\overline{OE} = R - 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AEO$:

$$R - 2r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad (1)$$

Els triangles $\triangle AGC$ i $\triangle ABD$ són semblants, aplicant el teorema

de Tales: $\frac{b}{2R} = \frac{h}{b}$, aleshores, $h = \frac{b^2}{2R}$ (2)

$$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{(2R)^2 - b^2}}{2R}, \text{ aleshores, } a = \frac{b}{R} \sqrt{(2R)^2 - b^2} \quad (3)$$

Considerem el triangle rectangle $\triangle ACD$ i la seua circumferència inscrita de radi r .

$$\text{Aleshores, } r = \frac{h + \frac{a}{2} - b}{2} \quad (4)$$

Substituint les expressions (2), (3) en l'expressió (4):

$$2r = \frac{b^2}{2R} + \frac{b}{2R} \sqrt{(2R)^2 - b^2} - b \quad (5)$$

Substituint l'expressió (5) en l'expressió (1):

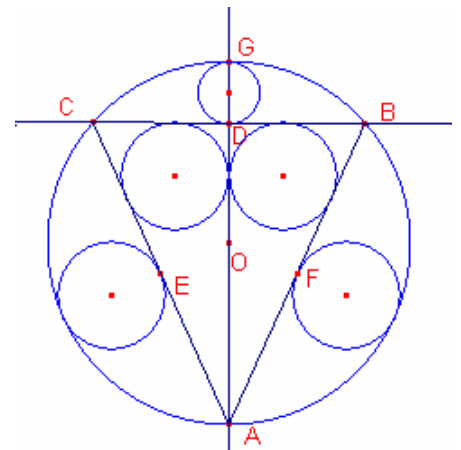
$$R - \left(\frac{b^2}{2R} + \frac{b}{2R} \sqrt{(2R)^2 - b^2} - b \right) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \quad (6)$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$2b^2 - 2Rb - 3R^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita b :

$$b = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} R \quad (7)$$

Substituint l'expressió (7) en l'expressió (1)



$$R - 2r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}R\right)^2}$$

$$\text{Aleshores, } 2r = R - R\sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{16}}, \quad r = \frac{5-\sqrt{7}}{8}R.$$

$$h + 2s = 2R. \text{ Aleshores, } 2s = 2R - h = 2R - \frac{b^2}{2R} = 2R - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}R\right)^2}{2R} = \frac{4-\sqrt{7}}{4}R,$$

$$\text{aleshores, } s = \frac{4-\sqrt{7}}{8}R.$$

Problema 9



Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ constant.
Siga la seua circumferència inscrita de centre O_1 i radi r_1 . Una circumferència de centre O_2 i radi r_2 és tangent als costats del triangle $\overline{AB}, \overline{AC}$ i tangent exterior a la circumferència anterior. Així es construeixen n circumferències.

Si n és constant i $x = \overline{BC}$ variable.
Per a quin valor de x el radi r_n és màxim.

Solució:

Siga H el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga D el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$ i el costat $\overline{AC}$.

Siguen E, F les tangents de les altres circumferències.

Considerem la recta tangent a les dues primeres circumferències que talla el costat $\overline{AB}$ en el punt K . Siga J la projecció de K sobre el costat $\overline{BC}$.

$$\overline{AD} = \frac{2a+x}{2}, \quad \overline{CH} = \overline{CD} = \frac{x}{2}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AO_1D$:

$$\left(\sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - r_1 \right)^2 = r_1^2 + \left(\frac{2a+x}{2} \right)^2.$$

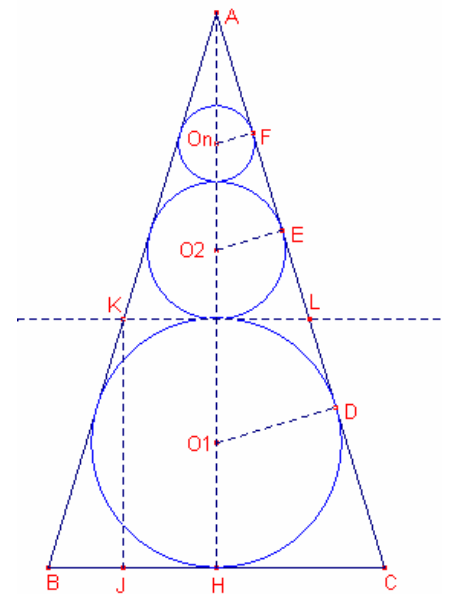
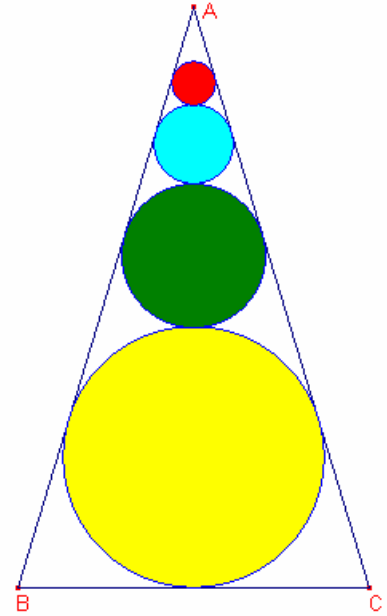
$$\text{Aleshores, } r_1 = \frac{x\sqrt{2a-x}}{2\sqrt{2a+x}} \quad (1)$$

$$\overline{KL} = \overline{DE}$$

$$\overline{BJ} = \frac{\overline{BC} - \overline{KL}}{2} = \frac{x - \overline{DE}}{2}, \quad \overline{LC} = \overline{KB} = \overline{CD} + \frac{\overline{DE}}{2} = \frac{x + \overline{DE}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\triangle KJB$:

$$\left(\frac{x - \overline{DE}}{2} \right)^2 + (2r_1)^2 = \left(\frac{x + \overline{DE}}{2} \right)^2.$$



$$\text{Aleshores, } \overline{DE} = \frac{4r_1^2}{x} \quad (2)$$

Siga h l'altura sobre el costat $\overline{BC}$ del triangle

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD} - \overline{DE}}{\overline{AD}}.$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{h - 2r_1}{h} = \frac{h - 2r_1 - 2r_2}{h - 2r_1} = \frac{r_3}{r_2}$$

Aleshores:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = \dots = \frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{\overline{AD} - \overline{DE}}{\overline{AD}} \quad (3)$$

$$\frac{\overline{AD} - \overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{2a-x}{2}}{\frac{2a-x}{2} - \frac{4r_1^2}{x}} = \frac{x(2a-x)}{x(2a-x) - 8r_1^2} = \frac{x(2a-x)}{x(2a-x) - 8\left(\frac{x(2a-x)}{2(2a+x)}\right)^2} = \frac{2a-x}{2a+x}$$

Multiplicant les n-1 primeres igualtats de (3):

$$\frac{r_n}{r_1} = \left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-1}$$

$$r_n = r_1 \left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-1} = \frac{x\sqrt{2a-x}}{2\sqrt{2a+x}} \left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-1} = \frac{x}{2} \left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Calculem la derivada de r_n respecte de la variable x:

$$\frac{d(r_n)}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-\frac{1}{2}} + \frac{x}{2} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-\frac{3}{2}} \frac{-4a}{(2a+x)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-1} \left(\frac{-x^2 - 4a\left(n - \frac{1}{2}\right)x + 4a^2}{(2a-x)(2a+x)} \right)$$

$$\frac{d(r_n)}{dx} = 0, \text{ si } -x^2 - 4a\left(n - \frac{1}{2}\right)x + 4a^2 = 0$$

Resolent l'equació:

$$x = \left(\sqrt{(2n-1)^2 + 4} - (2n-1) \right) a.$$

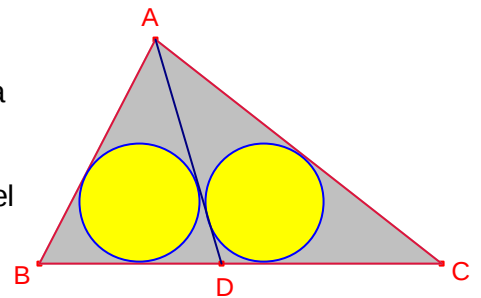
Problema 10



Siga el triangle $\triangle ABC$ qualsevol i r el radi de la circumferència inscrita i h_a l'altura sobre el costat $\overline{BC}$.

Les circumferències inscrites als triangles $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ tenen el mateix radi r_1 .

Determineu r_1 en termes de r i h_a .



Solució:

Vegem primer la relació entre el radi d'una circumferència inscrita a un triangle i l'altura.

Siga p el semiperímetre. Igualant les fórmules de les àrees:

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\text{Aleshores, } r = \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}, \quad h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}.$$

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat $\overline{BC}$.

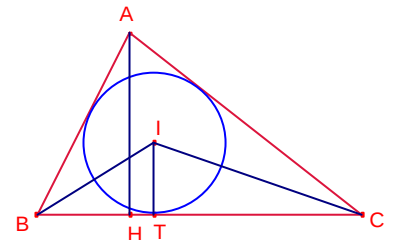
$$\overline{BT} = p - b, \quad \overline{CT} = p - c, \quad \text{tg } \frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \text{tg } \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

$$\text{tg } \frac{B}{2} \cdot \text{tg } \frac{C}{2} = \frac{r^2}{(p-a)(p-b)} = \frac{p-a}{p} = 1 - \frac{a}{p} \cdot 1 - \frac{2r}{h_a} = 1 + \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = 1 - \frac{a}{p}.$$

$$\text{Aleshores, } 1 - \frac{2r}{h_a} = \text{tg } \frac{B}{2} \cdot \text{tg } \frac{C}{2} \quad (1)$$

Aplicant la propietat anterior al triangle $\triangle ABD$

$$1 - \frac{2r_1}{h_a} = \text{tg } \frac{B}{2} \text{tg } \frac{\angle BDA}{2} \quad (2)$$



Aplicant la propietat anterior al triangle $\triangle ADC$

$$1 - \frac{2r_1}{h_a} = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{\angle ADC}{2} \quad (3)$$

Substituint les expressions (2) (3) en l'expressió (1):

$$1 - \frac{2r}{h_a} = \frac{1 - \frac{2r_1}{h_a}}{\operatorname{tg} \frac{\angle BDA}{2}} \cdot \frac{1 - \frac{2r_1}{h_a}}{\operatorname{tg} \frac{\angle ADC}{2}}$$

$$\text{Com que } \operatorname{tg} \frac{\angle BDA}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle ADC}{2} = 1,$$

$$1 - \frac{2r}{h_a} = \left(1 - \frac{2r_1}{h_a} \right)^2. \text{ Aïllant la incògnita } r_1:$$

$$r_1 = \frac{h_a - \sqrt{h_a^2 - 2rh_a}}{2}.$$

Bibliografia.

García Capitán, F. (2003) Problemas San Gaku. 2003.

Es pot descarregar en: <http://garciacapitan.auna.com/problemas/sangaku1/libro.pdf>

Eiichi Ito i altres. Japanese Temple Mathematical problems, in Nagano Pref. Japan. 2003.

Adreces:

<http://www.wasan.jp/english/>

Pàgina japonesa sobre Sangaku.

<http://mathworld.wolfram.com/SangakuProblem.html>

Enciclopèdia Mathworld. Entrada SangakuProblem

<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml>

Applets amb problemes Sangaku.

http://www.mfdabbs.pwp.blueyonder.co.uk/Maths_Pages/SketchPad_Files/Japanese_Temple_Geometry_Problems/Japanese_Temple_Geometry.html

Applets amb problemes Sangaku.

<http://www.arrakis.es/~mcj/sangaku.htm>

Pàgines de la Gacetilla matemática. On podeu trobar les demostracions d'alguns teoremes Sangaku.

<http://agutie.homestead.com/files/sangaku2.html>

Pàgina d'Antonio Gutiérrez. Problemes de Geometria.