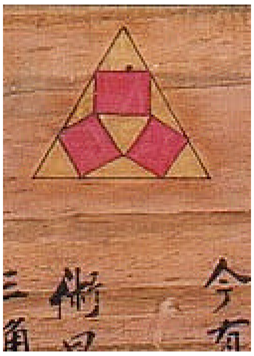
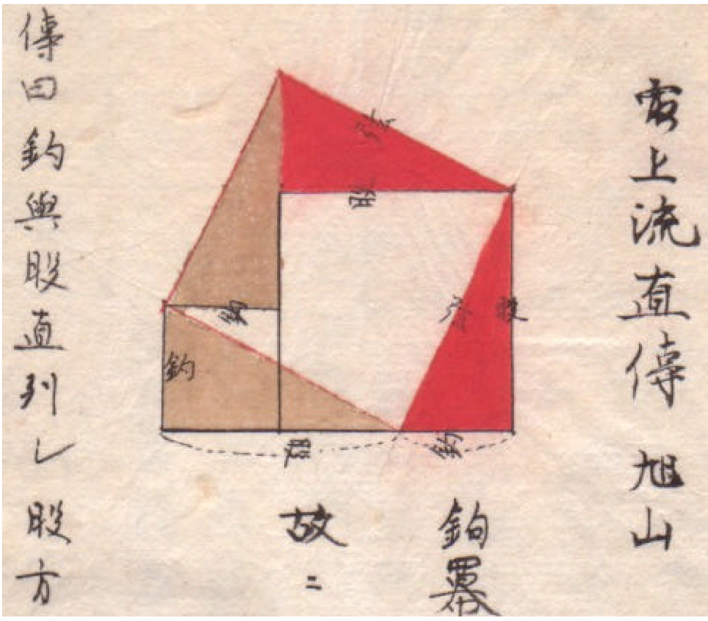
10 problemas Sangaku con triángulos





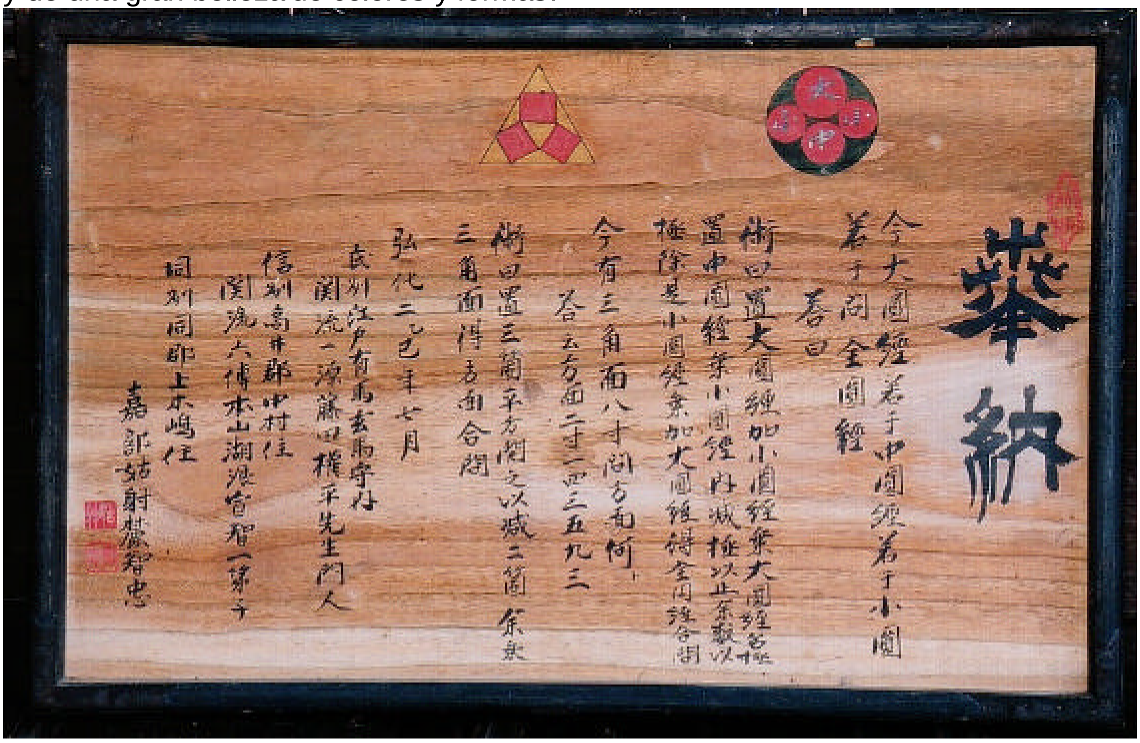
Ricard Peiró i Estruch

Enero 2009

Introducción

Los Sangaku son unas tablas de madera con enunciados de problemas de geometría euclídea creados en Japón en el período Edo 1603-1867. En este período Japón estaba aislado de occidente. Estas tablas estaban expuestas en los templos budistas.

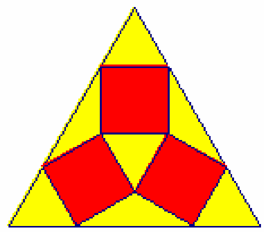
Los 10 problemas escogidos pertenecen a tablas de la prefectura de Nagano y su temática principal son triángulos. Los problemas son de distinto grado de complejidad y de una gran belleza de colores y formas.



Enunciados

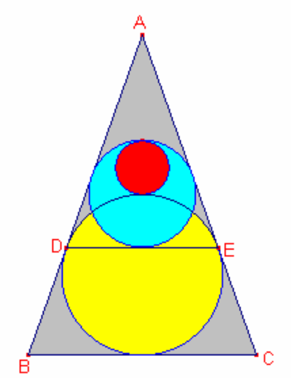
Problema 1

La siguiente figura está formada por 1 triángulo equilátero y 3 cuadrados iguales. El lado del triángulo equilátero es a. Calcular el lado del cuadrado.



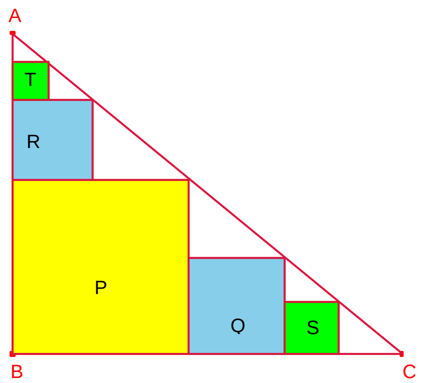
Problema 2

Sea el triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Sea la circunferencia inscrita de centro O_1 y radio r_1. Sean D, E los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita y los lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ del triángulo. Sea la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ADE}$ de centro O_2 y radio r_2. Consideremos la circunferencia de centro O_3 y radio r_3. Determinar el valor de r_2 en términos de r_3.



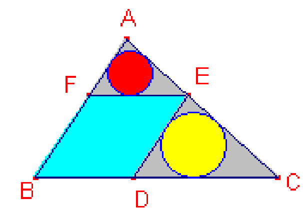
Problema 3

En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90^{\circ}$, se han inscrito los cuadrados P, Q, R, S, T (ver figura). Si los lados de los cuadrados S, T son a, b, respectivamente, calcular el lado del cuadrado P.



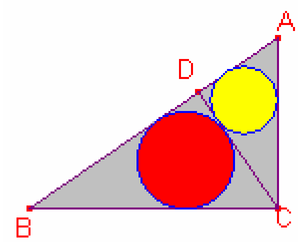
Problema 4

El rombo BDEF está inscrito en el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{AFE}$ y s el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{DCE}$. Determinar r en función de s y de los lados a, c.



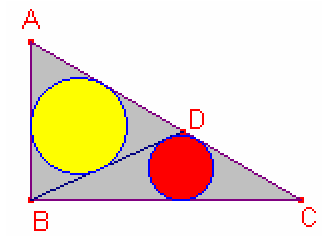
Problema 5

En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^{\circ}$, sea $\overline{CD}$ la altura sobre la hipotenusa.
Sean conocidos los catetos del triángulo. Determinar los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{BCD}$.



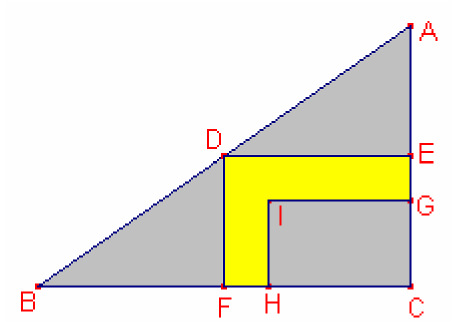
Problema 6

Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90º$. Sea D un punto de la hipotenusa $\overline{AC}$. Sea r_1 el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$ y r_2 el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{BCD}$. Determinar el radio r_1 en función de r_2 y de los catetos $a = \overline{BC}$ y $c = \overline{AB}$.



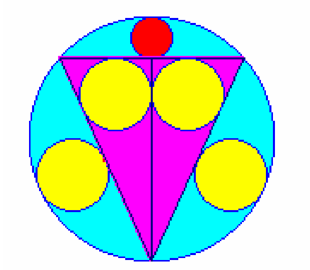
Problema 7

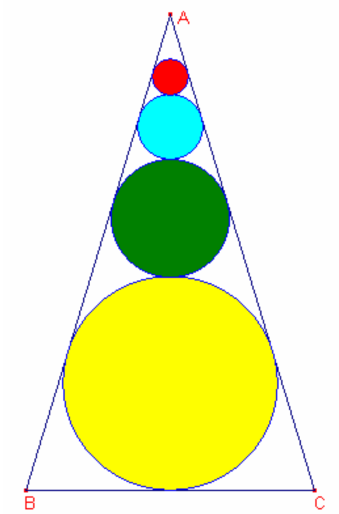
Dado el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$, tal que los triángulos $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{DAF}$, y el rectángulo HCGI tienen la misma área. Si $x = \overline{FH} = \overline{GE}$, determinar x en función de los catetos del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.



Problema 8

En la siguiente figura el triángulo es isósceles y está inscrito en una circunferencia de radio R. Hay 4 circunferencias iguales de radio r y una circunferencia más pequeña de radio s.
Calcular los radios de las circunferencias r y s en función de R radio de la circunferencia mayor.





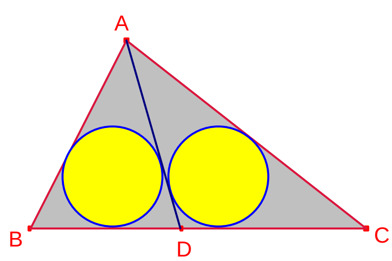
Problema 9

Sea el triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ constante. Sea la circunferencia inscrita de centro O_1 y radio r_1. Una circunferencia de centro O_2 y radio r_2 es tangente a los lados del triángulo $\overline{AB}, \overline{AC}$ y tangente exterior al la circunferencia anterior. Así se construyen n circunferencias.
Si n es constante y $x = \overline{BC}$ variable.
Para que valor de x el radio r_n es máximo.

Problema 10

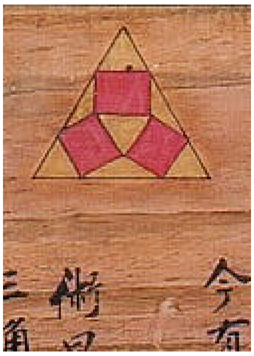
Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cualquiera y r el radio de la circunferencia inscrita y h_a .la altura sobre el lado $\overline{BC}$.

Las circunferencias inscritas a los triángulos $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ tienen el mismo radio r_1.
Determinar r_1 en términos de r y h_a.

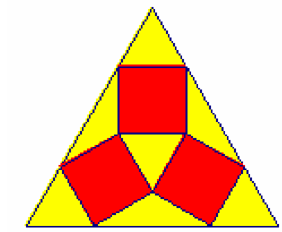


Soluciones

Problema 1



La siguiente figura está formada por 1 triángulo equilátero y 3 cuadrados iguales. El lado del triángulo equilátero es a. Calcular el lado del cuadrado.



Solución:

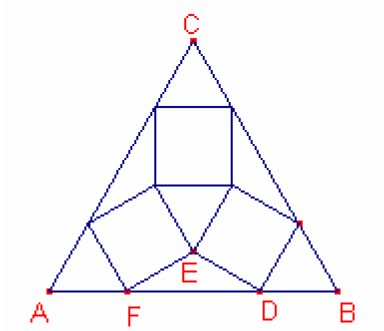
Sea el triángulo equilátero $\overset{\Delta}{ABC}$ de lado a.

Sea $x = \overline{DE} = \overline{BD}$ lado del cuadrado.

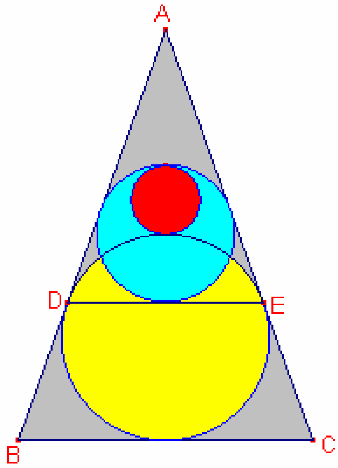
$\angle EDF = 30^{o}$. Entonces, $\overline{DF} = \sqrt{3}x$.

$a = 2x + \sqrt{3}x = \left(2 + \sqrt{3}\right)x$.

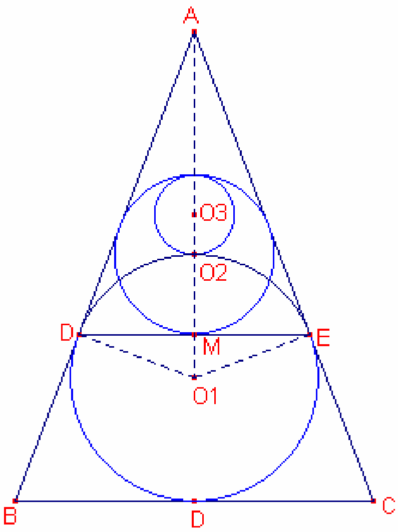
Entonces, $x = \left(2 - \sqrt{3}\right)a$.



Problema 2



Sea el triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Sea la circunferencia inscrita de centro O_1 y radio r_1. Sean D, E los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita y los lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ del triángulo. Sea la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ADE}$ de centro O_2 y radio r_2. Consideremos la circunferencia de centro O_3 y radio r_3. Determinar el valor de r_2 en términos de r_3.



Solución:

Sea H el punto medio del lado $\overline{BC}$.

Sea M el punto medio del segmento $\overline{DE}$.

Sea $\alpha = \angle DAM = \angle MDO_1$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{MDO_1}$:

$\overline{DM} = r_1 \cos\alpha$. Por tanto, $\overline{DE} = 2r_1 \cos\alpha$. $\overline{MO_1} = r_1 \sin\alpha$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ADO_1}$:

$$\overline{AO_1} = \frac{r_1}{\sin\alpha},\ \overline{AD} = \frac{r_1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Entonces,

$$\overline{AM} = \overline{AO_1} - \overline{MO_1} = \frac{r_1}{\sin\alpha} - r_1 \sin\alpha.$$

Calculando el área del triángulo $\overset{\Delta}{ADE}$:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\overline{DE}\cdot\overline{AM} = \frac{1}{2}2r_1\cos\alpha\cdot\left(\frac{r_1}{\sin\alpha} - r_1\sin\alpha\right) = r_1^2\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha\right).$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\left(2\overline{AD} + \overline{DE}\right)r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2r_1}{\operatorname{tg}\alpha} + 2r_1\cos\alpha\right)r_2 = r_1 r_2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \cos\alpha\right).$$

Igualando las áreas:

$$r_1^2\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha\right) = r_1 r_2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \cos\alpha\right).$$ Simplificando:

$$r_1\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha\right) = r_2\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\right).$$

Despejando r_2:

$$r_2 = \frac{\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha} r_1 = \frac{1-\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha} r_1 = (1-\sin\alpha) r_1 .$$

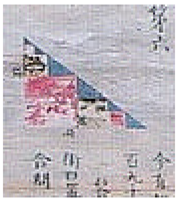
Entonces,

$$r_2 = (1-\sin\alpha) r_1 = r_1 - \overline{MO_1} .$$

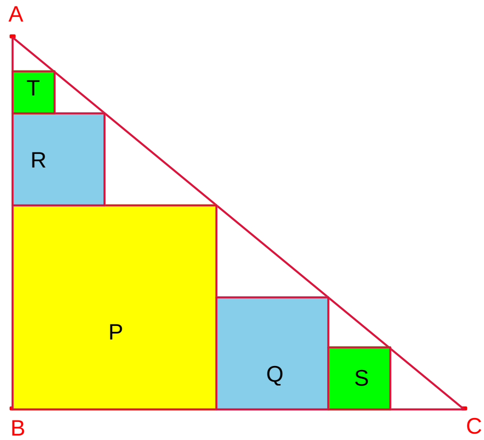
Entonces, el centro de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ADE}$ pertenece a la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Entonces, $r_2 = 2r_3$.

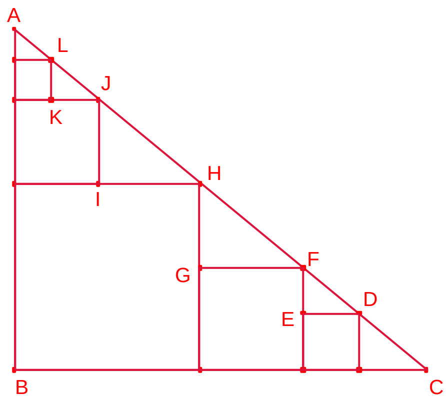
Problema 3



En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90^{\circ}$, se han inscrito los cuadrados P, Q, R, S, T (ver figura). Si los lados de los cuadrados S, T son a, b, respectivamente, calcular el lado del cuadrado P.



Solución:
Sea x el lado del cuadrado P.
Sea y el lado del cuadrado Q.
Sea z el lado del cuadrado R.



Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{DEF}$, $\overset{\Delta}{FGH}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{a}{y-a} = \frac{y}{x-y}. \text{ Entonces, } y^2 = ax \qquad (1)$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{FGH}$, $\overset{\Delta}{HIJ}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{y}{x-y} = \frac{x-z}{z}. \text{ Entonces, } z = x-y \qquad (2)$$

Los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{JKL}$, $\overset{\Delta}{HIJ}$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{x-z}{z} = \frac{z-b}{b}. \text{ Entonces, } b(x-z) = z(z-b) \qquad (3)$$

Sustituyendo la expresión (2) en la expresión (3):

$b(x-x-y) = (x-y)(x-y-b)$.

$y^2 - 2xy + x^2 - bx = 0$. Resolviendo la ecuación en la incógnita y:

$$y = x - \sqrt{bx} \qquad (4)$$

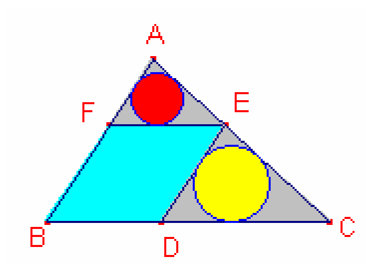
Igualando las expresiones (1) y (4):

$ax = \left(x - \sqrt{bx}\right)^2$. Resolviendo la ecuación en la incógnita x:

$x = a + b + 2\sqrt{ab}$.

Problema 4

El rombo BDEF está inscrito en el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ sea r el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{AFE}$ y s el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{DCE}$. Determinar r en función de s y de los lados a, c.



Solución:

Sea $x = \overline{BD} = \overline{BF}$ el lado del rombo.

Los triángulos $\overset{\Delta}{AFE}$, $\overset{\Delta}{DCE}$ son semejantes aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{r}{s} = \frac{x}{a - x}\text{, entonces, } r = \frac{x}{a - x}s \qquad (1)$$

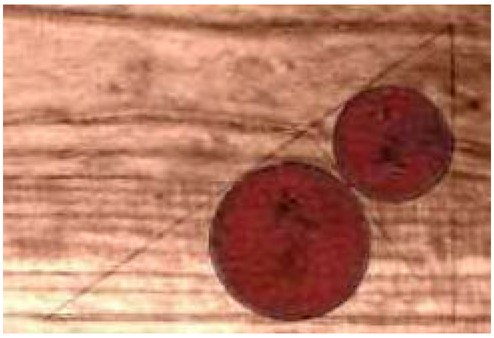
Los triángulos $\overset{\Delta}{AFE}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ son semejantes aplicando el teorema de Tales:

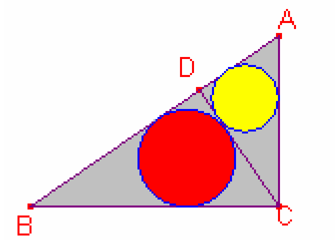
$$\frac{x}{a} = \frac{c}{c - x}\text{, entonces, } x = \frac{ac}{a + c} \qquad (2)$$

Sustituyendo la expresión (2) en la expresión (1) y simplificando:

$$r = \frac{cs}{a}.$$

Problema 5





En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90º$, sea $\overline{CD}$ la altura sobre la hipotenusa.
Sean conocidos los catetos del triángulo. Determinar los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{BCD}$.

Solución:
Sean los catetos $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$

Sean r, s los radios de les circunferencias inscritas a los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{BCD}$, respectivamente.

Aplicando el teorema del cateto al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

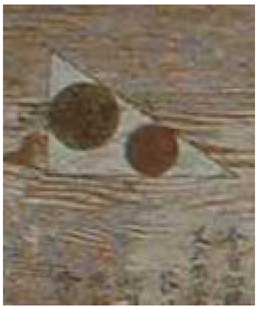
$b^2 = \overline{AH} \cdot c$, entonces, $\overline{AH} = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. $a^2 = \overline{BH} \cdot c$, entonces, $\overline{BH} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

El radio de la circunferencia inscrita a un triángulo rectángulo es igual al semiperímetro menos la hipotenusa, entonces:

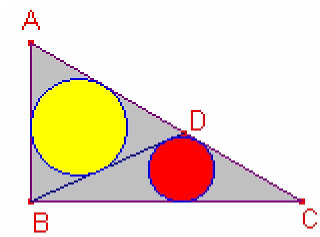
$$r = \frac{\overline{AC} + \overline{AD} + \overline{CD}}{2} - \overline{AC}, \quad r = \frac{b + \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{2} - b = \frac{-b\sqrt{a^2+b^2} + b^2 + ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Análogamente, $s = \dfrac{-a\sqrt{a^2+b^2} + a^2 + ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

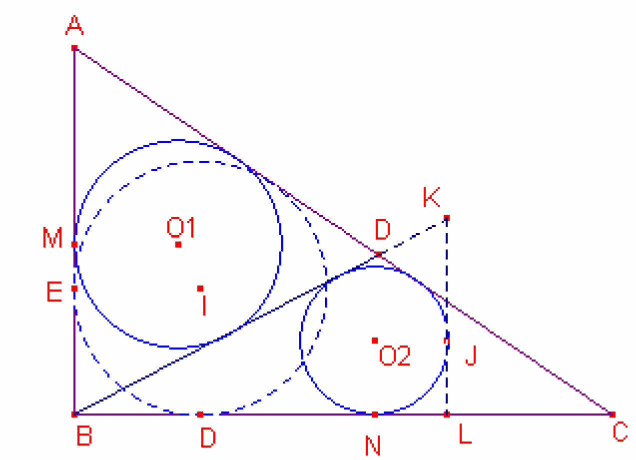
Problema 6



Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90º$. Sea D un punto de la hipotenusa $\overline{AC}$. Sea r_1 el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$ y r_2 el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{BCD}$. Determinar el radio r_1 en función de r_2 y de los catetos $a = \overline{BC}$ y $c = \overline{AB}$.



Solución:
Sea O_1 el centro de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$ de radio r_1.
Sea O_2 el centro de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{BCD}$ de radio r_2.
Consideremos la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ de centro I y radio r.
Sea D, E los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ y los lados a, c respectivamente.
Sea M el punto de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$ y el lado c.



Sea N el punto de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{BCD}$ y el lado a.

Los triángulos $\overset{\Delta}{AMO_1}$, $\overset{\Delta}{AEI}$ son semejantes, aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AM}}{c-r} = \frac{r_1}{r}. \text{ Entonces, } \overline{AM} = \frac{r_1(c-r)}{r}. \quad \overline{BM} = c - \frac{r_1(c-r)}{r} \qquad (1)$$

Los triángulos $\overset{\Delta}{CNO_2}$, $\overset{\Delta}{CDI}$ son semejantes, aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CN}}{a-r} = \frac{r_2}{r}. \text{ Entonces, } \overline{CN} = \frac{r_2(a-r)}{r}. \quad \overline{BN} = a - \frac{r_2(a-r)}{r} \qquad (2)$$

Consideremos el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BLK}$, $L = 90º$ tal que la circunferencia de centro O_2 y radio r_2 es inscrita al triángulo. Sea J el punto de tangencia del lado $\overline{KL}$ y la circunferencia.
$\overline{BK} = \overline{BN} + \overline{KJ}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BLK}$:

$\left(\overline{BN}+\overline{KJ}\right)^2=\left(\overline{BN}+r_2\right)^2+\left(\overline{KJ}+r_2\right)^2$. Despejando $\overline{KJ}$.

$$\overline{KJ}=\frac{\left(\overline{BN}+r_2\right)r_2}{\overline{BN}-r_2} \qquad (3)$$

Sustituyendo la expresión (1) en la expresión (3):

$$\overline{KJ}=\frac{r_2\left(ar-ar_2+2r_2r\right)}{a(r-r_2)} \qquad (4)$$

Los triángulos $\overset{\Delta}{BMO_1}$, $\overset{\Delta}{KJO_2}$ son semejantes aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BM}}{r_1}=\frac{\overline{KJ}}{r_2} \qquad (5)$$

Sustituyendo las expresiones (1) (4) en la expresión (5):

$$\frac{\dfrac{cr-r_1(c-r)}{r}}{r_1}=\frac{\dfrac{r_2(ar-ar_2+2r_2r)}{a(r-r_2)}}{r_2}.$$

Simplificando:

$$ac\left(r^2-rr_1-rr_2+r_2r_1\right)=2r^2r_2r_1 \qquad (6)$$

Despejando r_1

$$r_1=\frac{ac\left(r^2-rr_2\right)}{2r^2r_2+ac(r-r_2)} \qquad (7)$$

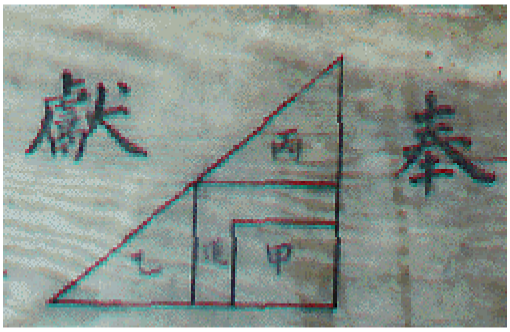
El radio de la circunferencia inscrita del triángulo rectángulo es igual al semiperímetro menos la hipotenusa:

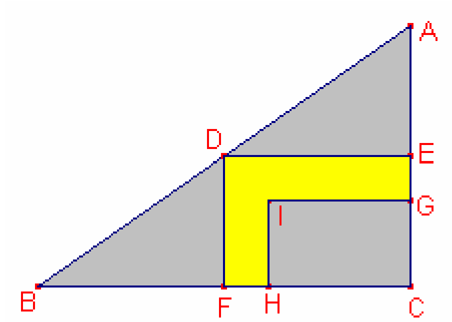
$$r=\frac{a+c+\sqrt{a^2+c^2}}{2}-\sqrt{a^2+c^2}=\frac{a+c-\sqrt{a^2+c^2}}{2} \qquad (8)$$

Sustituyendo la expresión (8) en la expresión (7) y simplificando:

$$r_1=\frac{ac\left(a+c-2r_2-\sqrt{a^2+c^2}\right)}{2\left(ac-2r_2\sqrt{a^2+c^2}\right)}.$$

Problema 7





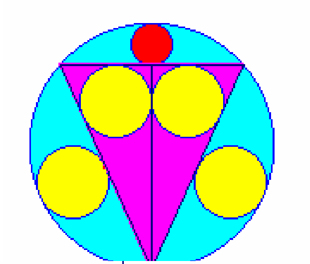
Dado el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$, tal que los triángulos $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{DAF}$, y el rectángulo HCGI tienen la misma área. Si $x = \overline{FH} = \overline{GE}$, determinar x en función de los catetos del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

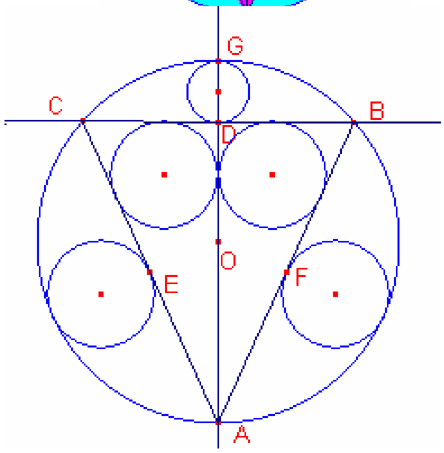
Solución:
Sea $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$.
Si los triángulos $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{DAF}$ tienen la misma área, entonces, $\overline{BF} = \frac{1}{2}a$, $\overline{AE} = \frac{1}{2}b$.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ADE}$ es $S_{ADE} = \frac{ab}{8}$.

$\overline{HC} = \frac{a}{2} - x$, $\overline{CG} = \frac{b}{2} - x$.
El área del rectángulo HCGI es:
$S_{HXGI} = \left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{b}{2} - x\right)$, $S_{HXGI} = S_{ADE}$. Entonces:
$\left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{b}{2} - x\right) = \frac{ab}{8}$. Resolviendo la ecuación en la incógnita x:
$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$.

Problema 8





En la siguiente figura el triángulo es isósceles y está inscrito en una circunferencia de radio R. Hay 4 circunferencias iguales de radio r y una circunferencia más pequeña de radio s.
Calcular los radios de las circunferencias r y s en función de R radio de la circunferencia mayor.

Solución:

Sea el triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AB} = \overline{AC}$.
Sea $h = \overline{AD}$ altura del triángulo. Sea $\overline{OE} = R - 2r$.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AEO}$:

$$R - 2r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \qquad (1)$$

Los triángulos $\overset{\Delta}{AGC}$ i $\overset{\Delta}{ABD}$ son semejantes, aplicando el teorema de Tales: $\frac{b}{2R} = \frac{h}{b}$, entonces, $h = \frac{b^2}{2R}$
(2)

$$\frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\sqrt{(2R)^2 - b^2}}{2R}\text{, entonces, } a = \frac{b}{R}\sqrt{(2R)^2 - b^2} \qquad (3)$$

Consideremos el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ACD}$ y la circunferencia inscrita de radio r.

$$\text{Entonces, } r = \frac{h + \frac{a}{2} - b}{2} \qquad (4)$$

Sustituyendo las expresiones (2), (3) en la expresión (4):

$$2r = \frac{b^2}{2R} + \frac{b}{2R}\sqrt{(2R)^2 - b^2} - b \qquad (5)$$

Sustituyendo la expresión (5) en la expresión (1):

$$R - \left(\frac{b^2}{2R} + \frac{b}{2R}\sqrt{(2R)^2 - b^2} - b\right) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \qquad (6)$$

Elevando al cuadrado y simplificando:
$2b^2 - 2Rb - 3R^2 = 0$. Resolviendo la ecuación en la incógnita b:

$$b = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}R \qquad (7)$$

Sustituyendo la expresión (7) en la expresión (1)

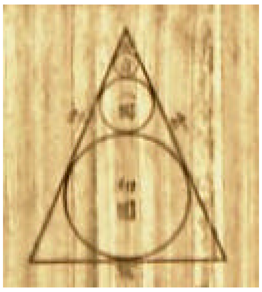
$$R-2r=\sqrt{R^2-\left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}R\right)^2}$$

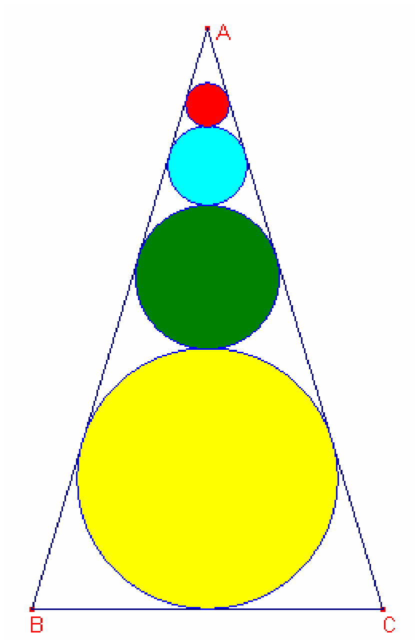
Entonces, $2r=R-R\sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{16}}$, $r=\frac{5-\sqrt{7}}{8}R$.

$h+2s=2R$. Entonces, $2s=2R-h=2R-\frac{b^2}{2R}=2R-\frac{\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}R\right)^2}{2R}=\frac{4-\sqrt{7}}{4}R$,

entonces, $s=\frac{4-\sqrt{7}}{8}R$.

Problema 9





Sea el triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ constante. Sea la circunferencia inscrita de centro O_1 y radio r_1. Una circunferencia de centro O_2 y radio r_2 es tangente a los lados del triángulo $\overline{AB}, \overline{AC}$ y tangente exterior al la circunferencia anterior. Así se construyen n circunferencias.

Si n es constante y $x = \overline{BC}$ variable.

Para que valor de x el radio r_n es máximo.

Solución:

Sea H el punto medio del lado $\overline{BC}$.

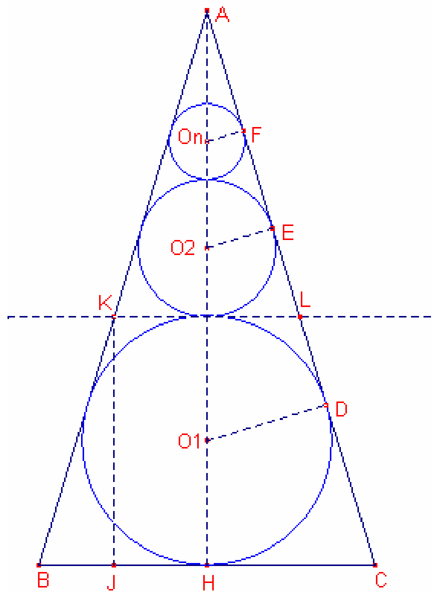
Sea D el punto de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ y el lado $\overline{AC}$.

Sean E, F les tangentes de las otras circunferencias.

Consideremos la recta tangente a las dos primeras circunferencias que cortan el lado $\overline{AB}$ en el punto K. Sea J la proyección de K sobre el lado $\overline{BC}$.

$$\overline{AD} = \frac{2a+x}{2}, \quad \overline{CH} = \overline{CD} = \frac{x}{2}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{AO_1D}$:

$$\left(\sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - r_1\right)^2 = r_1^{\,2} + \left(\frac{2a+x}{2}\right)^2.$$

Entonces, $r_1 = \dfrac{x\sqrt{2a-x}}{2\sqrt{2a+x}}$ (1)

$$\overline{KL} = \overline{DE}$$

$$\overline{BJ} = \frac{\overline{BC} - \overline{KL}}{2} = \frac{x - \overline{DE}}{2}, \quad \overline{LC} = \overline{KB} = \overline{CD} + \frac{\overline{DE}}{2} = \frac{x + \overline{DE}}{2}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\overset{\Delta}{KJB}$:

$$\left(\frac{x - \overline{DE}}{2}\right)^2 + (2r_1)^2 = \left(\frac{x + \overline{DE}}{2}\right)^2.$$

Entonces, $\overline{DE} = \dfrac{4r_1^{\,2}}{x}$ (2)

Sea h la altura sobre el lado $\overline{BC}$ del triángulo

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD} - \overline{DE}}{\overline{AD}}.$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{h - 2r_1}{h} = \frac{h - 2r_1 - 2r_2}{h - 2r_1} = \frac{r_3}{r_2}$$

Entonces:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = ... = \frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{\overline{AD} - \overline{DE}}{\overline{AD}} \qquad (3)$$

$$\frac{\overline{AD} - \overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\dfrac{2a - x}{2}}{\dfrac{2a - x}{2} - \dfrac{4r_1^{\,2}}{x}} = \frac{x(2a - x)}{x(2a - x) - 8r_1^{\,2}} = \frac{x(2a - x)}{x(2a - x) - 8\left(\dfrac{x(2a - x)}{2(2a + x)}\right)^2} = \frac{2a - x}{2a + x}$$

Multiplicando las n-1 primeras igualdades de (3):

$$\frac{r_n}{r_1} = \left(\frac{2a - x}{2a + x}\right)^{n-1}$$

$$r_n = r_1\left(\frac{2a - x}{2a + x}\right)^{n-1} = \frac{x\sqrt{2a - x}}{2\sqrt{2a + x}}\left(\frac{2a - x}{2a + x}\right)^{n-1} = \frac{x}{2}\left(\frac{2a - x}{2a + x}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Calculemos la derivada de r_n respecto de la variable x:

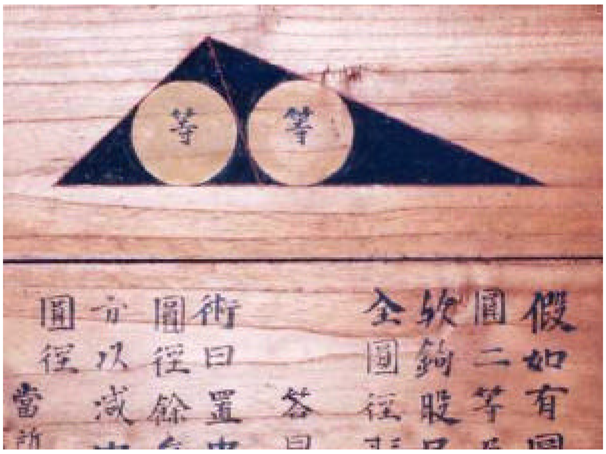
$$\frac{d(r_n)}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a - x}{2a + x}\right)^{n-\frac{1}{2}} + \frac{x}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2a - x}{2a + x}\right)^{n-\frac{3}{2}} \frac{-4a}{(2a + x)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a - x}{2a + x}\right)^{n-1}\left(\frac{-x^2 - 4a\left(n - \frac{1}{2}\right)x + 4a^2}{(2a - x)(2a + x)}\right)$$

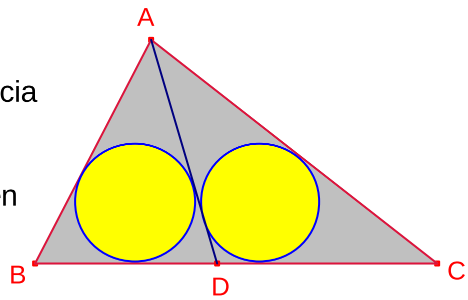
$$\frac{d(r_n)}{dx} = 0 \text{, si } -x^2 - 4a\left(n - \frac{1}{2}\right)x + 4a^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$x = \left(\sqrt{(2n - 1)^2 + 4} - (2n - 1)\right)a.$$

Problema 10





Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cualquiera y r el radio de la circunferencia inscrita y h_a .la altura sobre el lado $\overline{BC}$.

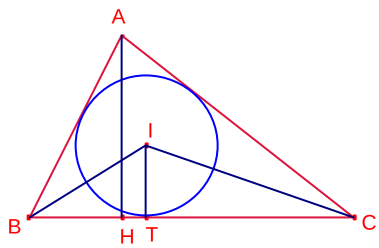
Las circunferencias inscritas a los triángulos $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ tienen el mismo radio r_1.

Determinar r_1 en términos de r y h_a.

Solución:

Veamos primero la relación entre el radio de una circunferencia inscrita a un triángulo y la altura.

Sea p el semiperímetro. Igualando les fórmulas de las áreas:



$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Entonces, $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, $\quad h_a = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$.

Sea T el punto de tangencia de la circunferencia inscrita y el lado $\overline{BC}$.

$$\overline{BT} = p-b, \ \overline{CT} = p-c ,. \ tg\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \ tg\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

$$tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{C}{2} = \frac{r^2}{(p-a)(p-b)} = \frac{p-a}{p} = 1-\frac{a}{p}. \quad 1-\frac{2r}{h_a} = 1+\frac{2\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}{\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}} = 1-\frac{a}{p}.$$

Entonces, $1-\dfrac{2r}{h_a} = tg\dfrac{B}{2}\cdot tg\dfrac{C}{2}$ (1)

Aplicando la propiedad anterior al triángulo $\overset{\Delta}{ABD}$

$1-\dfrac{2r_1}{h_a} = tg\dfrac{B}{2}\, tg\dfrac{\angle BDA}{2}$ (2)

Aplicando la propiedad anterior al triángulo $\overset{\Delta}{ADC}$

$$1-\frac{2r_1}{h_a}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle ADC}{2} \qquad (3)$$

Sustituyendo las expresiones (2) (3) en la expresión (1):

$$1-\frac{2r}{h_a}=\frac{1-\frac{2r_1}{h_a}}{\operatorname{tg}\frac{\angle BDA}{2}}\cdot\frac{1-\frac{2r_1}{h_a}}{\operatorname{tg}\frac{\angle ADC}{2}}$$

Como que $\operatorname{tg}\angle\frac{BDA}{2}\cdot\operatorname{tg}\angle\frac{ADC}{2}=1$,

$1-\frac{2r}{h_a}=\left(1-\frac{2r_1}{h_a}\right)^2$. Despejando la incógnita r_1:

$$r_1=\frac{h_a-\sqrt{{h_a}^2-2rh_a}}{2}.$$

Bibliografía.

García Capitán, F. (2003) Problemas San Gaku. 2003.
Se puede descargar en: http://garciacapitan.auna.com/problemas/sangaku1/libro.pdf

Eiichi Ito y otros. Japanese Temple Mathematical problems, in Nagano Pref. Japan. 2003.

Direcciones:

http://www.wasan.jp/english/
Página japonesa sobre Sangaku.

http://mathworld.wolfram.com/SangakuProblem.html
Enciclopedia Mathworld. Entrada SangakuProblem

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml
Applets con problemas Sangaku.

http://www.mfdabbs.pwp.blueyonder.co.uk/Maths_Pages/SketchPad_Files/Japanese_Temple_Geometry_Problems/Japanese_Temple_Geometry.html
Applets con problemas Sangaku.

http://www.arrakis.es/~mcj/sangaku.htm
Páginas de la Gacetilla matemática. Se pueden encontrar las demostraciones de algunos teoremas Sangaku.

http://agutie.homestead.com/files/sangaku2.html
Página d'Antonio Gutiérrez. Problemas de Geometría.