Solución de: Correa Pablo Ariel. Profesor de la ESB Nº42. Buenos Aires, Argentina.

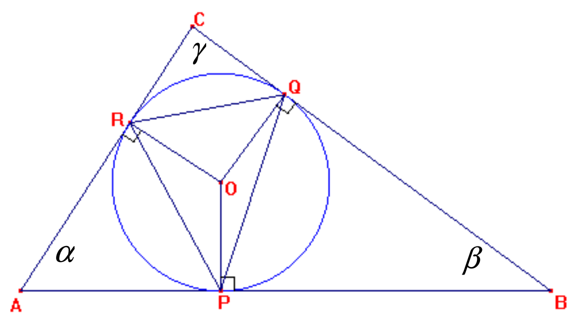
Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico “A. Einstein”, 64100 Teramo, Italia

Problema 484

564 Sea S el área del triángulo y S_n el área del triángulo formado por los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita. Es:

$S = S_n(2R/r)$

Alasia, C. (1900): La recente geometría del triangolo. Cittá di Castello, S. Lapi, tipografo-editore. (p. 339)



Teniendo en cuenta que en el cuadrilátero APOR dos de sus ángulos son suplementarios y que denominamos al <RAP=α , nos queda que <ROP $=(\pi-\alpha)$

$$2.[ROP] = r^2.sen(\pi-\alpha) = r^2.sen\alpha$$
$$+\,2.[OPQ] = r^2.sen(\pi-\beta) = r^2.sen\beta$$
$$2.[QOR] = r^2.sen(\pi-\gamma) = r^2.sen\gamma$$

$$(*)\,[RPQ] = \frac{r^2(sen\alpha + sen\beta + sen\gamma)}{2}$$

Considerando el teorema generalizado de los senos:

$$\frac{a}{sen\alpha} = 2R \rightarrow sen\alpha = \frac{a}{2R}$$
$$\frac{b}{sen\beta} = 2R \rightarrow sen\beta = \frac{b}{2R}$$
$$\frac{c}{sen\gamma} = 2R \rightarrow sen\gamma = \frac{c}{2R}$$

Si sustituimos en la expresión (*):

$$[RPQ] = \frac{r^2(a+b+c)}{4R}$$
$$[ABC] = \frac{r(a+b+c)}{2}$$
$$\frac{[ABC]}{[RPQ]} = \frac{2R}{r}$$