Problema 484 de *triánguloscabri*. *Sea S el área del triángulo y S_n el área del triángulo formado por los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita. Es: $S = S_n(2R/r)$.*

Alasia, C. (1900): La recente geometria del triangolo. (p. 339)

Propuesto por Ercole Suppa.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Teniendo en cuenta las fórmulas del área

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R} = sr,$$

tenemos que

$$\frac{2R}{r} = \frac{2 \cdot abc}{4S} \cdot \frac{s}{S} = \frac{abcs}{2S^2} = \frac{abcs}{2s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{2(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Por otro lado, las coordenadas baricéntricas de los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo son $D = (0 : s-c : s-b)$, $E = (s-c : 0 : s-a)$ y $F = (s-b : s-a : 0)$. Por tanto, el S_n/S viene dado por la fórmula:

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{S} =& \frac{1}{(2s-(b+c))(2s-(c+a))(2s-(a+b))}\begin{vmatrix} 0 & s-c & s-b \\ s-c & 0 & s-a \\ s-b & s-a & 0 \end{vmatrix}\\ =& \frac{1}{abc} \cdot 2(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}.\end{aligned}$$

Queda entonces probada la desigualdad propuesta.