Si los puntos que dividen cada lado de un triángulo en tres partes iguales se unen al correspondiente vértice opuesto, se forma un hexágono cuya área es la décima parte del área del triángulo.

Las tres diagonales son segmentos de las medianas del triángulo original.

El hexágono da lugar a dos triángulos de lados paralelos al original.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **485**

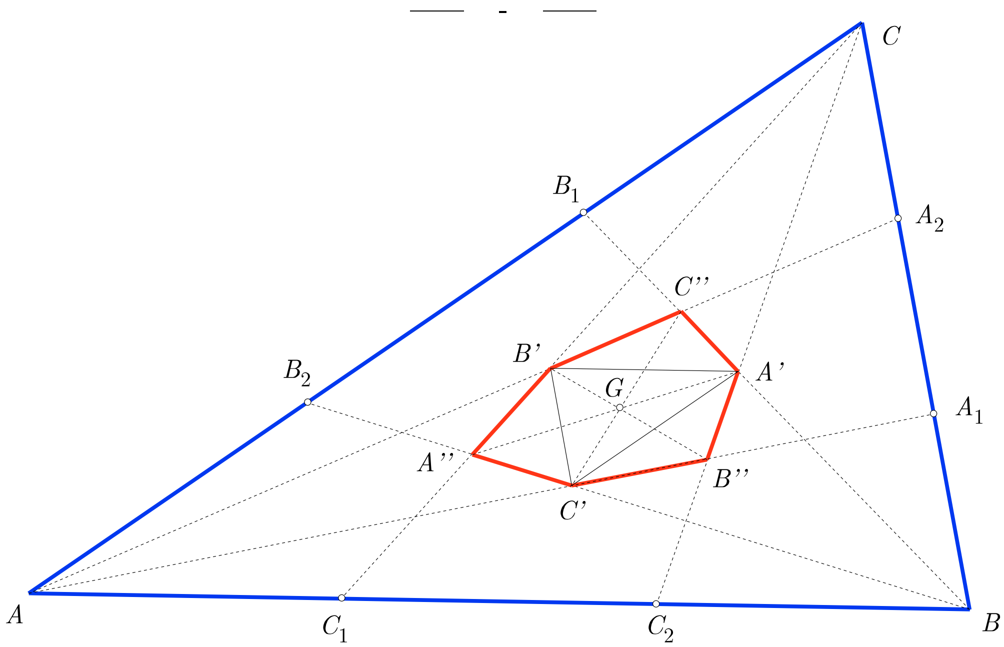
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Cuoco, A. Goldenberg, P.and Mark, J.(1993). Reader Reflections.

Marion´s Theorem. The Matematics Teacher, 86(8). Kennedy response.(p. 619)

Con el enunciado siguiente:

> *[1]Si los puntos que dividen cada lado de un triángulo en tres partes iguales se unen al correspondiente vértice opuesto, se forma un hexágono cuya área es la décima parte del área del triángulo.*
> *[2] Tres diagonales son segmentos de las medianas originales.*
> *[3] El hexágono da lugar a dos triángulos de lados paralelos al original.*



Usaremos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo dado $\widehat{ABC}$.

Si los puntos $P_i(x_i : y_i : z_i)$, $i = 1, 2$, vienen dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, tales que $x_1+y_1+z_1 = x_2 + y_2 + z_2$, el punto P que separa P_1 y P_2 en la razón m/n ($P_1P/PP_2 = m/n = \rho$) es

$$P(nx_1 + mx_2 : ny_1 + my_2 : nz_1 + mz_2).$$

El punto $A_1(0 : 2 : 1)$ separa a B y C en la razón $1/2$ y el punto $A_2(0 : 1 : 2)$ separa a B y C en la razón $2/1$: A_1 y A_2 dividen al lado BC en tres partes iguales. Así mismo, los puntos $B_1(1 : 0 : 2)$ y $B_2(2 : 0 : 1)$ dividen al lado CA en tres partes iguales, y lo mismo que $C_1(2 : 0 : 1)$ y $C_2(1 : 0 : 2)$ al lado AC.

Los puntos de intersección de los pares de rectas $BB_1 \cap CC_2$ ($2x - z = 0, 2x - y = 0$), $CC_1 \cap AA_2$ ($x - 2y = 0, 2y - z = 0$) y $AA_1 \cap BB_2$ ($y - 2z = 0, x - 2z = 0$) son, respectivamente,

$$A'(1 : 2 : 2), \qquad B'(2 : 1 : 2), \qquad C'(2 : 2 : 1).$$

Y los puntos de corte de las rectas $BB_2 \cap CC_1$, $CC_2 \cap AA_1$, $AA_2 \cap BB_1$ son, respectivamente:

$$A''(2 : 1 : 1), \qquad B''(1 : 2 : 1), \qquad C''(1 : 1 : 2).$$

El área de un triángulo de vértices D, E y F con coordenadas baricéntricas absolutas

$$D(x_1, y_1, z_1), \qquad E(x_2, y_2, z_2), \qquad F(x_3, y_3, z_3),$$

con $x_1+y_1+z_1=x_2+y_2+z_2=x_3+y_3+z_3=1$, es

$$\text{área } \widehat{DEF} = \text{área } \widehat{ABC} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Si los puntos vienen dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, dividimos éstas por la suma de sus respectivas coordenadas.

El hexágono $A'C''B'A''C'B''$ queda seccionado por los cuatro triángulos $\widehat{A'B'C'}$, $\widehat{A'C''B'}$, $\widehat{B'A''C'}$, $\widehat{C'B''A'}$, que con las coordenadas de sus vértices obtenidas arriba, se tiene que:

$$\text{área } \widehat{A'B'C'} = \frac{1}{25}\text{área } \widehat{ABC}, \qquad \text{área } \widehat{A''B''C''} = \frac{1}{16}\text{área } \widehat{ABC},$$

$$\text{área } \widehat{A'C''B'} = \frac{1}{50}\text{área } \widehat{ABC}, \quad \text{área } \widehat{B'A''C'} = \frac{1}{50}\text{área } \widehat{ABC}, \quad \text{área } \widehat{C'B''A'} = \frac{1}{50}\text{área } \widehat{ABC}.$$

De donde, se sigue que

$$\text{área}\{A'C''B'A''C'B''\} = \frac{1}{10}\text{área } \widehat{ABC}.$$

La mediana $A(1:0:0)$ $G(1:1:1)$ de ecuación $y-z=0$ contienen a los puntos A' y A'', que forman una diagonal del hexágono. Análogamente, las medianas BG $(x-z=0)$ y CG $(x-y=0)$ contienen a los puntos B', B'' y C', C'', respectivamente.

Los lados BC, CA y AB de $\widehat{ABC}$ son paralelos, respectivamente, a los lados $B'C'$, $C'A'$ y $A'B'$ de $\widehat{A'B'C'}$, pues la recta $B'C'$ $-3x+2y+2z=0$, corta a la recta del infinito $x+y+z=0$ en el mismo punto $(0:1:-1)$ que la recta BC $(x=0)$. La misma situación se tiene con las rectas $C'A'$ $(2x-3y+2z=0)$ y $A'B'$ $(2x+2y-3z=0)$, que son paralelas respectivamente a $y=0$ y $z=0$.

También los lados de $\widehat{ABC}$ son paralelos a los de $\widehat{A''B''C''}$; ya que las rectas $B''C''$ $(3x-y-z=0)$, $C''A''$ $(x-3y+z=0)$ y $A''B''$ $(x+y-3z=0)$, tienen los mismos puntos del infinito que $x=0, y=0$ y $z=0$, respectivamente.

Obsérvese que la homotecia de razón -5 y centro en el baricentro G de $\widehat{ABC}$, transforma el triángulo $\widehat{A'B'C'}$ en el $\widehat{ABC}$. También $\widehat{ABC}$ se transforma en $\widehat{A''B''C''}$, mediante la homotecia de razón $1/4$ y centro en G. Luego, la homotecia de centro en G y razón $-5/4$, transforma $\widehat{A'B'C'}$ en $\widehat{A''B''C''}$.

Una generalización:

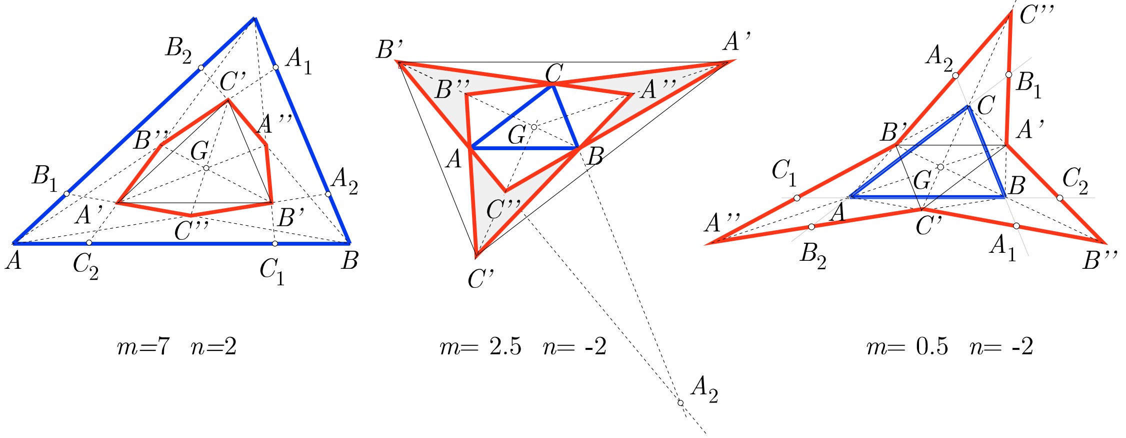
Si tomamos los puntos A_1 y A_2 tales que dividen a BC en las razones m/n y n/m, respectivamente, y los puntos B_1 y B_2 en CA y C_1 y C_2 en AB, con el mismo criterio, para el hexágono $A'C''B'A''C'B''$ determinado por los puntos

$$A' = BB_1 \cap CC_2,\ B' = CC_1 \cap AA_2,\ C' = AA_1 \cap BB_2, \quad A'' = BB_2 \cap CC_1,\ B'' = CC_2 \cap AA_2,\ C'' = AA_2 \cap BB_2,$$

se tiene:

$$\text{área}\{A'C''B'A''C'B''\} = \frac{2(m-n)^2}{(2m+n)(m+2n)}\text{área } \widehat{ABC}.$$

(Applet CabriJava)



En el caso particular en que $m = 2$ y $n = 1$, tenemos lo que se afirma en enunciado de este problema.

También se verifican las otras dos propiedades del enunciado; es decir, las diagonales del hexágono están en la medianas de $\widehat{ABC}$ y los triángulos $\widehat{A'B'C'}$ y $\widehat{A''B''C''}$ son homotéticos a $\widehat{ABC}$, mediante homotecias de centro en G.

Todo esto se sigue utilizando las coordenadas de los puntos que intervienen en esta construcción:

$$A_1(0,n,m) \quad A_2(0,m,n) \quad B_1(m,0,n) \quad B_2(n,0,m) \quad C_1(n,m,0) \quad C_2(m,n,0),$$

$$A'(m,n,n) \quad B'(n,m,n) \quad C'(n,n,m) \qquad A''(n,m,m) \quad B''(m,n,m) \quad C''(m,m,n).$$

$$\text{área } \widehat{A'B'C'} = \frac{(m-n)^2}{(m+2n)^2}\text{área } \widehat{ABC}, \qquad \text{área } \widehat{A''B''C''} = \frac{(m-n)^2}{(2m+n)^2}\text{área } \widehat{ABC},$$

$$\text{área } \widehat{A'C''B'} = \text{área } \widehat{B'A''C'} = \text{área } \widehat{C'B''A'} = \frac{(m-n)^2 n}{(2m+n)(m+2n)^2}\text{área } \widehat{ABC}\ .$$

NOTA:

Este mismo procedimiento de obtener el área de un triángulo, en términos de coordenadas baricéntricas, puede utilizarse para resolver:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **484**

Con el enunciado:

Sea S el área del triángulo y S_n el área del triángulo formado por los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita. Es: $S = S_n(2R/r)$.

—— - ——

Para ello sólo debemos utilizar, por una parte, las fórmulas que relacionan los radios r y R de las circunferencias inscrita y circunscrita y el semiperímetro s, con el área de $\widehat{ABC}$:

$$4\,\text{área } \widehat{ABC}\ R = abc, \qquad \text{área } \widehat{ABC} = rs = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

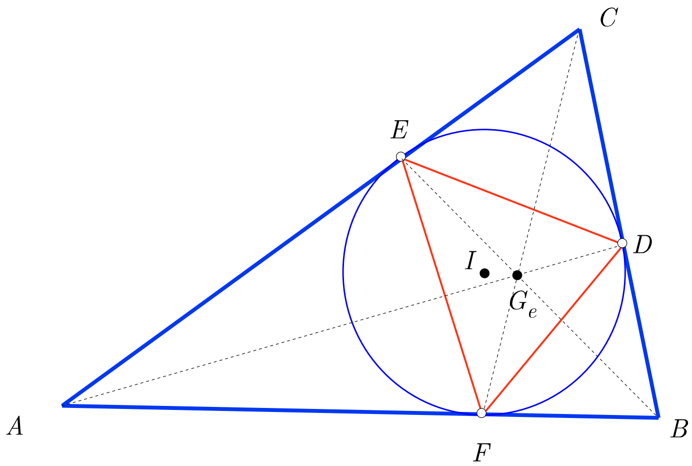
Además de recordar que los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados son los pies de las cevianas del punto de Gergonne

$$D(0 : a+b-c : a-b+c), \quad E(b-c+a : 0 : b+c-a), \quad F(c+a-b : c-a+b : 0).$$

Con lo que,

$$\text{área } \widehat{DEF} = \frac{1}{8abc}\begin{vmatrix} 0 & a+b-c & a-b+c \\ b-c+a & 0 & b+c-a \\ c+a-b & c-a+b & 0 \end{vmatrix}\text{área } \widehat{ABC} = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{4abc}\text{área } \widehat{ABC}\ .$$

$$\text{área } \widehat{DEF} = \frac{r}{2R}\text{área } \widehat{ABC}\ .$$



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2322.pdf