

Problema 485 de *triánguloscabri*. Problema 485

[1] *Si los puntos que dividen cada lado de un triángulo en tres partes iguales se unen al correspondiente vértice opuesto, se forma un hexágono cuya área es la décima parte del área del triángulo.*

Cuoco, A. Goldenberg, P. and Mark, J. (1993). Reader Reflections. Marion's Theorem. *The Mathematics Teacher*, 86(8). Kennedy response. (p. 619)

Teorema de Marion

La cubierta de Febrero de 1992 de *Mathematics Teacher* mostraba que si las terceras partes de los lados de un triángulo equilátero se unían a los vértices opuestos, el triángulo central tenía de área la séptima parte del área del triángulo original. En una carta en Marzo de 1993, Joe Kennedy señalaba que tal restricción a un triángulo equilátero no era necesaria [ver problema 22 de este *trianguloscabri*].

Alrededor de hace un año, Marion Walter y yo descubrimos el teorema dado, con el programa *Geometer's Sketchpad* descubrió el siguiente resultado, llamado Teorema de Marión en su honor:

El resultado puede ser demostrado por medios euclídeos, pero otro método de demostración es demostrarlo en un caso especial, el equilátero, y aplicar una transformación lineal que preserva las razones y las áreas hacia cualquier triángulo. Cuoco, A. Goldenberg, P. and Mark, J.

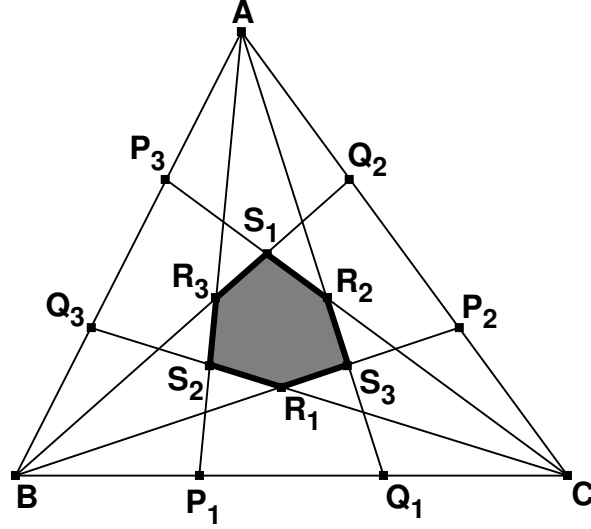
Kennedy responde: Este resultado me resulta agradable y sorprendente. Es hermoso y yo creo que el descubrirlo utilizando tecnología es una manera apropiada. Cuoco, Goldenberg, and Mark, dicen que lo han demostrado usando métodos ordinarios pero no lo he visto ni he hecho intentos.

Mis precipitadas miradas al teorema de Marion me llevan a algunas cuestiones. [2] Primero, **tres diagonales son segmentos de las medianas originales.**

[3] Segundo, **el hexágono da lugar a dos triángulos de lados paralelos al original...**

Solución de Francisco Javier García Capitán

Consideremos los puntos como en la figura siguiente:



Entonces, podemos calcular las coordenadas del punto R_1 :

$$R_1 = BP_2 \cap CQ_3, \begin{cases} BP_2 : 2x - z = 0, \\ CQ_3 : 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow R_1 = (1 : 2 : 2).$$

De la misma forma, obtenemos las del punto S_1 :

$$S_1 = BQ_2 \cap CP_3, \begin{cases} BQ_2 : x - 2z = 0, \\ CP_3 : x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow S_1 = (2 : 1 : 1).$$

Y lo mismo para los otros puntos correspondientes a otros vértices:

$$R_2 = (2 : 1 : 2), \quad R_3 = (2 : 2 : 1), \quad S_2 = (2 : 1 : 2), \quad S_3 = (2 : 2 : 1).$$

Podemos hallar el área del hexágono dividiéndolo en triángulos:

$$(R_1 S_3 R_2 S_1 R_3 S_2) = (R_1 R_3 S_2) + (R_1 S_1 R_3) + (R_1 R_2 S_1) + (R_1 S_3 R_2)$$

Obsérvese que hemos tenido cuidado en expresar todos los triángulos en el mismo sentido, para que las áreas tengan todas el mismo signo. Considerando como unidad el área del triángulo ABC , tenemos,

$$(R_1 R_3 S_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{100}.$$

Las otras áreas son:

$$\begin{aligned}(R_1 S_1 R_3) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{100}, \\(R_1 R_2 S_1) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{100}, \\(R_1 S_3 R_2) &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{2}{100}.\end{aligned}$$

Entonces, el área del hexágono es

$$\frac{2}{100} + \frac{3}{100} + \frac{3}{100} + \frac{2}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

Para razonar que tres diagonales son segmentos de las medianas originales, observamos que, por ejemplo, la recta $R_1 S_1$ es la mediana que pasa por A , ya que la ecuación de ésta es $y = z$, y los puntos R_1 y S_1 cumplen esta condición.

Para razonar que el hexágono da lugar a dos triángulos de lados paralelos al original, observemos que la recta $S_2 S_3$ es paralela a BC . En efecto, teniendo en cuenta que $S_2 = (1 : 2 : 1)$ y $S_3 = (1 : 1 : 2)$, la ecuación de $S_2 S_3$ es $3x - y - z = 0$, y la intersección con $BC : x = 0$ da el punto $(0 : 1 : -1)$, con suma cero, un punto del infinito. Análogamente, tenemos que $R_2 R_3$ tiene ecuación $3x - 2y - 2z = 0$, siendo también paralela a BC .