

Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea D el pie de la altura desde A , P un punto arbitrario en AD , E el punto de intersección del lado AC con la recta BP y F el punto de intersección del lado AB con la recta CP , entonces las rectas DE y DF son simétricas respecto a AD .

Sean los puntos $G = PC \cap ED$ y $H = PB \cap FD$; y, construimos los puntos E' y F' donde cortan BG y CH a los lados AC y AB , respectivamente. Sean $P' = CF' \cap BE$, $P^* = EF' \cap E'F$. Probar que los puntos P' y P^* están sobre AD . ¿Es cierto para cualquier ceviana?

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **488**.

<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid; con el siguiente enunciado:

Se escoge un punto arbitrario P en el interior de la altura AD de un triángulo ABC . Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F , respectivamente. Demostrar que $\angle PDF = \angle PDE$. ¿Qué sucede si P está fuera del triángulo o la altura AD es exterior al triángulo?

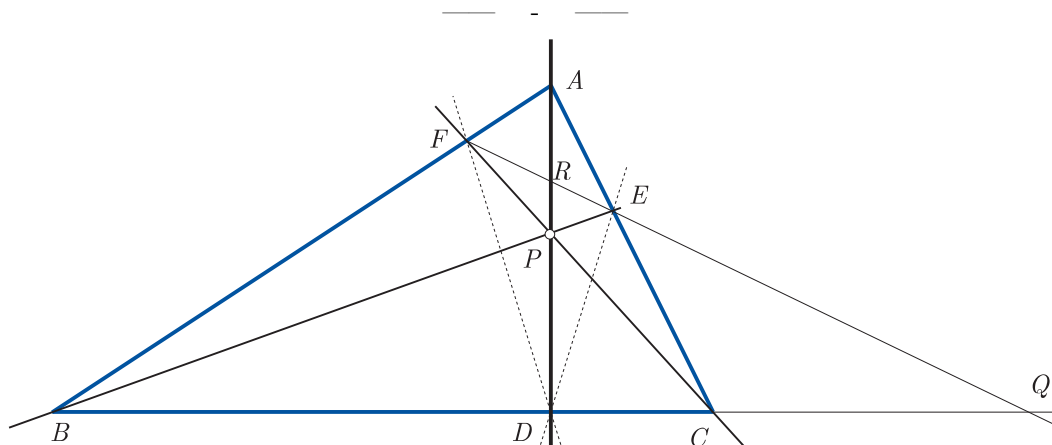
Haruki (1980) Ontario Secondary School Mathematics Bulletin

Sean $G = PC \cap ED$, y $H = PB \cap FD$; y, construimos los puntos E' , F' donde cortan BG , y CH , prolongadas a los lados AC y AB , respectivamente.

Sean $P' = CF' \cap BE$, $P^ = EF' \cap E'F$.*

Probar que:

Los puntos P^ , y P' están sobre AD (¿es cierto para cualquier ceviana?).*



Utilizando coordenadas baricéntricas (*), respecto a $\widehat{ABC}$, $D(0 : S_C : S_B)$ y $P(\lambda : S_C : S_B)$ es un punto genérico en AD . La recta $BP : S_Bx - \lambda z = 0$ corta a AC en $E(\lambda : 0 : S_B)$. La recta $CP : S_Cx - \lambda y = 0$ corta a AB en $F(\lambda : S_C : 0)$.

El simétrico(**) de E respecto a AD es $E'(\lambda(S_B + S_C) : 2S_BS_C : S_B(S_B - S_C))$. Los puntos D, F y E' están alineados, ya que es nulo el determinante formado con sus coordenadas:

$$\begin{vmatrix} 0 & S_C & S_B \\ \lambda & S_C & 0 \\ \lambda(S_B + S_C) & 2S_BS_C & S_B(S_B - S_C) \end{vmatrix} = 0.$$

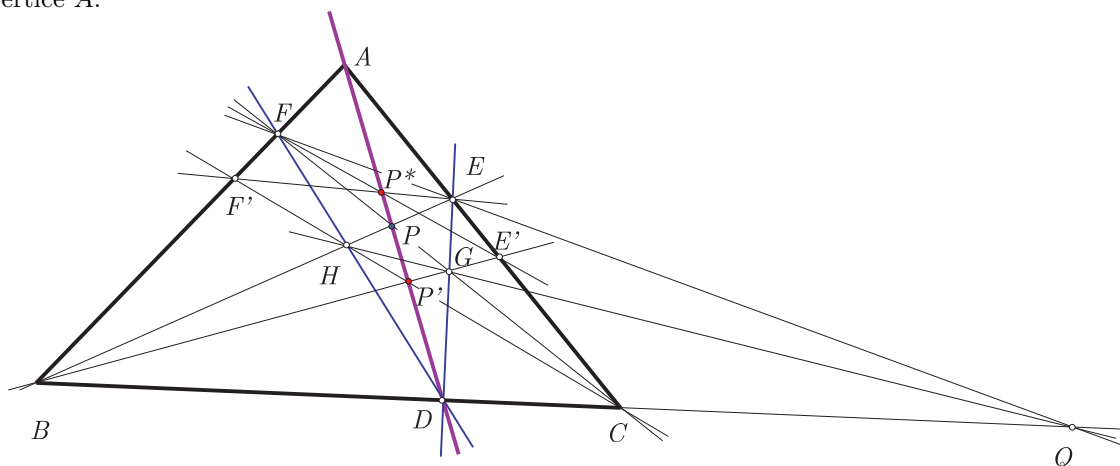
$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

(*) El uso de coordenadas es un recurso que nos permite afrontar un problema sin tener presente los hechos geométricos necesarios, y aún careciendo de la idea ingeniosa para utilizarlos. Los cálculos analíticos pueden llegar a ser engorrosas, pero puede servirnos de ayuda algún programa de cálculo simbólico.

El problema que nos ocupa puede ser resuelto teniendo en cuenta que en el cuadrivértice $AEPF$, los puntos diagonales B y C están armónicamente separados de los puntos D y Q en que los lados que pasan por el otro punto diagonal R cortan a la recta BC ; por tanto (proyectando desde P), E y F están separados armónicamente de R y Q . Concluimos que las rectas, perpendiculares, DA y DC están armónicamente separadas de las DE y DF , por lo que los ángulos determinados por éstas quedan bisecados por las anteriores.

Segunda parte:

Haremos la demostración para el caso general, es decir, cuando AD es una ceviana, no necesariamente la altura desde el vértice A .



Consideremos la proyectividad entre haces de rectas con puntos base en B y C , determinada por los pares de rectas homólogas:

$$(BA, CA), \quad (BP, CP), \quad (BC, CB).$$

Como la recta BC , que une los puntos base, se corresponden, esta proyectividad es una perspectividad, con eje de perspectividad la recta AD (donde se cortan las rectas homólogas).

Esta perspectividad entre haces induce una perspectividad entre los puntos de las rectas DE y DF , determinada por los pares de puntos homólogos:

$$(E, F), \quad (G, H), \quad (D, D).$$

Luego las rectas que unen punto homólogos pasan por un mismo punto $Q = EF = GH = CB$. Este punto Q es el armónicamente separado de D , respecto a B y C ; pues, B y C son dos puntos diagonales del cuadrivértice $AFPE$ y D y Q son los puntos en que los lados opuestos AP y EF cortan a la recta BC .

El cuadrivértice $PHP'G$ tiene dos puntos diagonales en B y C y los lados opuestos PP' y HG cortan a BC en D' y Q . Como se tiene la igualdad de razones dobles $(BCD'Q) = (BCDQ) = -1$, se sigue que $D = D'$ y, por tanto, P' está en la recta PD .

Para establecer que también P^* está en AD , usamos que P está en AD , eje de perspectividad de la perspectividad entre los haces de puntos base en B y C , considerada antes. Y como entonces las rectas BE' y CF' son homólogas, se induce una perspectividad entre los puntos de las rectas CA y BA con pares de puntos homólogos:

$$(A, A) \quad (E, F), \quad (E', F'), \quad (C, B).$$

Las rectas que unen puntos homólogos se cortan en Q . Tenemos entonces que $E'F'$ contiene a Q .

Tomemos ahora el cuadrivértice AFP^*E ; en él, los puntos diagonales E' y F' están armónicamente separados de los puntos D^* y Q en que sus lados opuestos que pasan por el otro punto diagonal S (no etiquetado en la figura); es decir, $(E'F'D^*Q) = -1$. Si proyectamos estos puntos desde A sobre la recta BC se obtiene que $(CBD^*, Q) = -1$ y como $(CBDQ) = -1$, se tiene que $D^* = D$; lo que implica que D^* está en AD y como también está en AP^* . Se concluye que P^* está en AD .