

Problema 491 de triángulos cabri. Probar o refutar si en todo triángulo ABC , al menos uno de los radios r_a, r_b, r_c de las circunferencias exinscritas es mayor o igual que una de las bisectrices interiores w_a, w_b, w_c .

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Usaremos las fórmulas siguientes.

Lema 1. En cualquier triángulo ABC ,

$$r_a^2 = \frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}, \quad w_a^2 = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}, \quad etc.$$

Demostración. La primera fórmula se deduce inmediatamente de las fórmulas del área Δ del triángulo ABC : $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = r_a(s-a)$, de donde

$$r_a^2 = \frac{\Delta^2}{(s-a)^2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-a)^2} = \frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}.$$

Para hallar la fórmula de la bisectriz w_a , sea L el pie de la bisectriz trazada por A , con $AL = w_a$. Entonces, usando el teorema de la bisectriz, tenemos que

$$BL = \frac{ac}{b+c}, \quad LC = \frac{ab}{b+c}.$$

Aplicando el teorema de Stewart a la ceviana $AL = w_a$ tenemos

$$\begin{aligned} b^2 \cdot BL + c^2 \cdot LC &= a(w_a^2 + BL \cdot LC), \\ b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} + c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} &= a \left(w_a^2 + \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} \right), \\ w_a^2 &= \frac{b^2c + bc^2}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) \\ &= bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c-a)(a+b+c)}{(b+c)^2} \\ &= \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

También usaremos el siguiente lema, que puede demostrarse de varias formas:

Lema 2. *En cualquier triángulo es cierta la desigualdad*

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \geq 6abc,$$

ocurriendo la igualdad cuando el triángulo es equilátero.

Demostración. En efecto, usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b}{abc} \\ &= \frac{a^2c + b^2c + a^2b + c^2b + a^2b + c^2a}{abc} \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} + 2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = 6, \end{aligned}$$

lo cual establece la desigualdad propuesta. $\square$

Si en algún caso todos radios r_a, r_b, r_c de las circunferencias exinscritas fueran menores que todas las bisectrices interiores w_a, w_b, w_c el producto de los primeros también sería menor que el producto de los segundos, por lo que tendríamos la desigualdad estricta

$$r_a^2 r_b^2 r_c^2 < w_a^2 w_b^2 w_c^2.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las fórmulas del Lema 1 podemos comprobar que $w_a^2 w_b^2 w_c^2 - r_a^2 r_b^2 r_c^2$, que tendría que ser positivo, se factoriza como

$$-\frac{s^3(s-a)(s-b)(s-c)fg}{(a+b)^2(a+c)^2(b+c)^2},$$

siendo

$$f = a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b - 6abc,$$

$$g = a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b + 10abc,$$

lo cual es imposible, teniendo en cuenta el Lema 2.

Deducimos entonces que en todo triángulo ABC , al menos uno de los radios r_a, r_b, r_c de las circunferencias exinscritas es mayor o igual que una de las bisectrices interiores w_a, w_b, w_c .