Construir un triángulo dado un ángulo, el radio de la circunferencia inscrita y el perímetro.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **492**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

Homenaje a dos matemáticos españoles

Problema 492

Ejemplo 4.- Construir un triángulo dado el perímetro 2p, un ángulo B y el radio r' del círculo inscrito.

Metodología y didáctica de la matemática elemental : para uso de los alumnos de Escuelas Normales y aspirantes al profesorado de 1a y 2a enseñanza / por J. Rey Pastor y P. Puig Adam Madrid [s. n.], 1933(p.83-84)

Solución tomada de los autores

Según una propiedad conocida por Geometría, el segmento BA" comprendido entre un vértice B y el punto A" de contacto del círculo exinscrito interior al ángulo B con uno de sus lados es igual al semiperimetro p, en este caso conocido.Es decir, BA"=BC"=p.

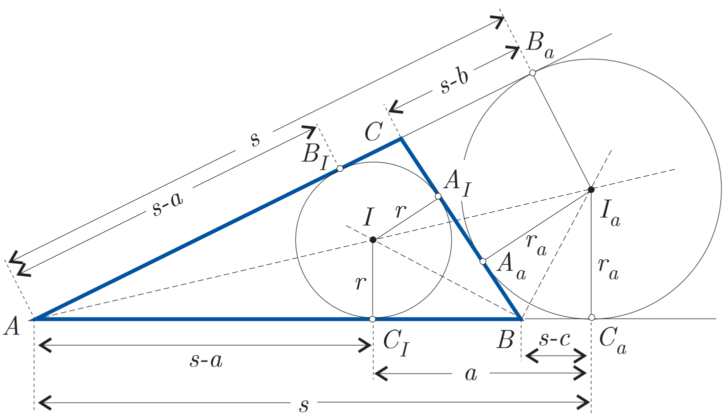
Los datos del problema permiten, pues, construir el ángulo B, la circunferencia O' inscrita en él, de radio dado, r', y la exinscrita O" tangente en A" y C" a sus lados. Con lo cual quedará determinado el lado AC del triángulo, que será tangente común a ambas circunferencias.

El lector completará fácilmente la discusión. ¿Existe siempre solución? Cuando hay dos tangentes interiores, ¿Hay en rigor dos soluciones?

—— - ——

Supongamos que nos dan el ángulo en el vértice A, el radio r de la circunferencia inscrita y el perímetro $2s$.

Los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita $I(r)$ con los lados del triángulo $\widehat{ABC}$ les llamamos A_I, B_I y C_I y los puntos de contacto de la circunferencia exinscrita $I_a(r_a)$ al triángulo $\widehat{ABC}$, relativa al vértice A, con los lados BC, CA y AB los denotamos por A_a, B_a y C_a, respectivamente. Entonces, se tienen las siguientes relaciones entre magnitudes de los segmentos:



Para el semiperímetro, $s = BA_I + A_IC + AC_I = a + AC_I$, por lo que $AC_I = s - a$. Por otra parte:

$$AB_a = AC + CA_a, \qquad AC_a = AB + BA_a.$$

Sumando miembro a miembro, se tiene que $AB_a + AC_a = 2s$ y, como $AB_a = AC_a$, resulta que $AB_a = AC_a = s$, $BA_a = BC_a = s - c$ y $CA_a = CB_a = s - b$.

Con estos hechos es fácil deducir ($r + r_a \geq AI_a - AI$) que para que se pueda construir el triángulo, con los datos dados, es necesario que se verifique la relación:

$$r + s \operatorname{tag} \frac{A}{2} \geq s \sec \frac{A}{2} - r \operatorname{cosec} \frac{A}{2}. \tag{1}$$

—— - ——

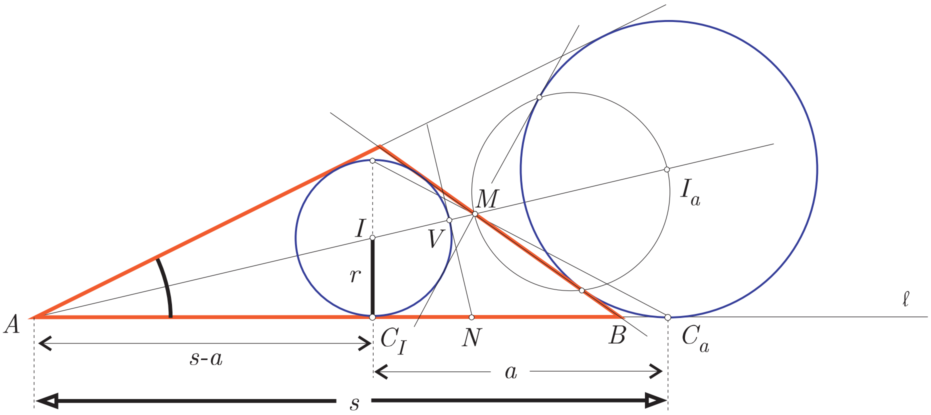
Un primer procedimiento se basa en que, como conocemos el ángulo en A y el radio r de la circunferencia inscrita y por lo dicho anteriormente, podemos determinar $a = s - AC_I$, una vez trazadas dos semirrectas desde un punto A, que formen un ángulo A, e inscrita la circunferencia $I(r)$ de radio r.

El problema se transforma en el de construir un triángulo con los datos a, A y r, propuesto en el Laboratorio Virtual de Triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número 401.

http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/enunciados401al.htm.
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2110.pdf.
http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol401vic.htm

—— - ——

Un segundo procedimiento de construcción puede ser descrito así:



Trazamos dos semirrectas desde un punto A, que formen un ángulo A, y inscribimos una circunferencia de radio r, que será la circunferencia inscrita $I(r)$ al triángulo pedido. Como nos dan el semiperímetro s, tomamos el punto C_a sobre una de las semirrectas (donde va a estar el vértice B y llamémosla ℓ), tal que $AC_a = s$. Trazamos la circunferencia inscrita a las semirrectas, tangente en C_a a ℓ, que debe ser la exinscrita $I_a(r_a)$ al triángulo a determinar, respecto al vértice A.

Sólo nos queda, si es posible, trazar las tangentes interiores a las circunferencias $I(r)$ y $I_a(r_a)$. Para ello, trazamos el segmento que une C_a con el punto diametralmente opuesto al punto de contacto C_I de $I(r)$ con ℓ. Por el punto M donde este segmento corta a la bisectriz interior en A, trazamos las tangentes a cualquiera de las circunferencias, que serán tangentes a la otra. Los vértices B (en ℓ) y C son los puntos donde una de estas tangentes cortan a las semirrectas, y el triángulo $\widehat{ABC}$ quedaría construido. Se obtienen dos triángulos, simétricos respecto a la bisectriz en A, o uno sólo si M coincide con V, donde V es el punto de intersección (más alejado de A) de la circunferencia inscrita $I(r)$ con la bisectriz en A; cuando M está en el interior de AV no hay solución. La solución queda garantizada cuando los datos verifican la relación equivalente a la (1):

$$s \geq AN + NV = 2r\frac{\left(1 + \operatorname{sen}\dfrac{A}{2}\right)^2}{\operatorname{sen} A},$$

donde N es el punto de intersección de ℓ con la tangente a $I(r)$ en V.

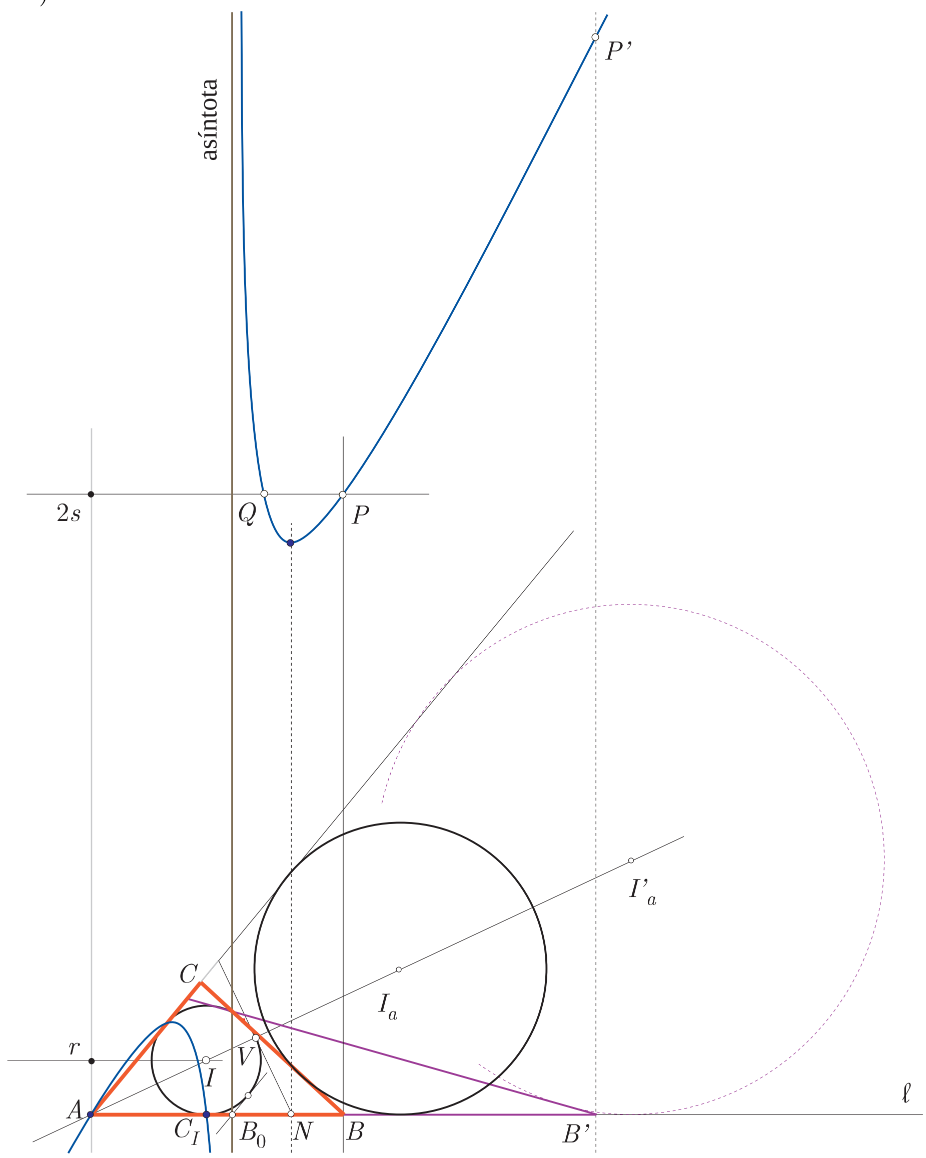
—— - ——

El siguiente camino está basado en que, de antemano, no conocemos determinadas propiedades de triángulos (como las usadas en los métodos anteriores) aunque sean archisabidas y elementales; por contra, tal vez, tengamos que necesitar otras técnicas no tan elementales. La idea es construir un triángulo variable con sólo dos de los datos dados (A y r, en este caso) y determinar el valor del tercer dato variable (semiperímretro) de los triángulos obtenidos; se trata de estudiar estos últimos valores y ver si entre ellos está el que nos dan.

Construimos un ángulo con vértice en un punto A y amplitud el ángulo dado A, y trazamos la circunferencia $I(r)$ de radio r, tangente a las semirrectas, que constituyen sus lados. Desde un punto B' de una de estas semirrectas, llamémosla ℓ, trazamos la otra tangente a $I(r)$; para que esta tangente sea el tercer lado de un triángulo con circunferencia inscrita $I(r)$, B' no puede estar entre A y el punto B_0 en que la tangente paralela a la otra semirrecta corta a ℓ.

Sobre la recta perpendicular a ℓ por B' tomamos el punto P' tal que $B'P'$ sea el perímetro del triángulo $\widehat{AB'C'}$ circunscrito a $I(r)$ con vértices A y B'. Cuando B' va desde B_0 al punto del infinito de la semirrecta ℓ, P' recorre una rama de una hipérbola [1], con una asíntota perpendicular a ℓ por B_0. La otra rama de esta hipérbola pasa por A y por el punto de tangencia C_I de $I(r)$ con ℓ, que son los puntos en los que el triángulo $\widehat{AB'C'}$ degenera.

(AppletCabriJava)



Por lo que con estos dos puntos y la asíntota, sólo nos basta determinar otro punto en tal hipérbola para que puede ser construida [2]. Como tercer punto podemos tomar el que corresponde al perímetro del triángulo isósceles determinado cuando su tercer lado es perpendicular a la bisectriz en A (este triángulo es el de perímetro mínimo circunscrito a la circunferencia $I(r)$ ya trazada).

Cuando la recta paralela a ℓ a una distancia de $2s$ corte a la hipérbola habrá dos solución: dos triángulos simétricos

---

(1) Tomando un sistema de coordenadas rectangular con origen en $A(0,0)$ y $B'(x,0)$, la otra tangente a la circunferencia inscrita $I(r)$, corta al otro lado en el punto de coordenadas (obtenidas con ayuda de MATHEMATICA):

$$C'\left(-\frac{2\operatorname{cotag} A\left(r^2\cos A + r^2 - rx\operatorname{sen} A\right)}{x\operatorname{sen} A - 2r}, -\frac{2\left(r^2\cos A + r^2 - rx\operatorname{sen} A\right)}{x\operatorname{sen} A - 2r}\right).$$

De la expresión de la ordenada de P', igual al perímetro de $\widehat{AB'C'}$, elevando al cuadrado dos veces para quitar los radicales, se obtiene que describe el siguiente lugar geométrico:

$$(-2r\cos(A/2) + y\operatorname{sen}(A/2))(-2r\cos(A/2) + 2x\operatorname{sen}(A/2) - y\operatorname{sen}(A/2))$$
$$(2rx - 2ry - 2rx\cos A + xy\operatorname{sen} A)(-2rx + 2ry - 2rx\cos A + 2x^2\operatorname{sen} A - xy\operatorname{sen} A) = 0.$$

Que contiene dos rectas, donde están los puntos P' cuando la circunferencia $I(r)$ es exinscrita a $\widehat{AB'C'}$ (en una cuando B' está entre A y C_I – manteniéndose el perímetro constante – y, en la otra, cuando B' recorre la semirrecta opuesta a ℓ), una solución extraña que representa una hipérbola equilátera y la hipérbola:

$$-2rx + 2ry - 2rx\cos A + 2x^2\operatorname{sen} A - xy\operatorname{sen} A = 0,$$

que pasa por A y por $C_I(r\operatorname{cotag}(A/2), 0)$ y tiene la asíntota vertical $2r - x\operatorname{sen} A = 0$.

(2) Para construir la hipérbola que pasa por tres puntos A_1, A_2, A_3 y tiene como asíntota la recta t, prodemos utilizar el Teorema de Pascal: Tomemos una recta arbitraria d_{14} que pasa por A_1 y determinemos el otro punto A_4 común son la cónica. Denotemos por d_{01} y d_{03} las paralelas a la asíntota por A_1 y A_3, y por d_{23} la recta A_2A_3. Los puntos $P_2 = d_{14} \cap d_{03}$ y $P_4 = d_{01} \cap d_{23}$ determinan la recta de Pascal, que corta a la asíntota en P_0. Entonces $A_4 = P_0A_2 \cap d_{14}$. Variando la recta d_{14} obtenemos más puntos de la hipérbola.

respecto a la bisectriz de A, o una sola si es tangente.

Para construir el triángulo buscado basta con proyectar sobre ℓ (para obtener el vértice B) un punto de corte de la hipérbola con la recta paralela a ℓ, a una distancia $2s$.

NOTA: La construcción de un triángulo del que se dan A, r y $2s$, ha sido discutida en The Math Forum: http://mathforum.org/library/drmath/view/55455.html.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2060.pdf