Problema 495. Sea un triángulo ABC, Δ su área, m_a, m_b, m_c las longitudes de sus medianas y w_a, w_b. w_c las longitudes de sus bisectrices interiores. Demostrar las siguientes desigualdades:

(a) $\quad m_am_b + m_bm_c + m_cm_a \geq 3\sqrt{3} \cdot \Delta$

(b) $\quad m_aw_a + m_bw_b + m_cw_c \geq 3\sqrt{3} \cdot \Delta$

Vicario, V. (2008): Comunicación personal.

Soluzione di Ercole Suppa. Adottiamo le notazioni usuali, ossia denotiamo con a, b, c i lati BC, CA, AB, con A, B, C gli angoli, con s il semiperimetro e con Δ l'area del triangolo $\triangle ABC$.

Per dimostrare le disuguaglianze richieste premettiamo i seguenti lemmi:

Lemma 1. In ogni triangolo $\triangle ABC$ sussiste la disuguaglianza

$$s^2 \geq 3\sqrt{3}\Delta$$

L'uguaglianza è verificata se e solo se $\triangle ABC$ è equilatero.

Proof. Dalla formula di Erone e dalla disuguaglianza AM-GM abbiamo:

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \leq s\left[\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right]^3 = \frac{s^4}{27}$$

e l'uguaglianza vale se $a = b = c$. $\square$

Lemma 2. In ogni triangolo $\triangle ABC$ sussiste la disuguaglianza

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \geq 3\sqrt{3}\Delta$$

L'uguaglianza è verificata se e solo se $\triangle ABC$ è equilatero.

Proof. Dalla formula della bisettrice $w_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ abbiamo:

$$w_a^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}s(s-a) = \frac{bc}{(b+c)^2}\left[(b+c)^2 - a^2\right] = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

ed, essendo $4bc \leq (b+c)^2$, risulta:

$$w_a^2 \geq bc - \frac{a^2}{4}$$

Pertanto:

$$\sum w_a^2 \geq \sum bc - \frac{1}{4}\sum a^2 \tag{1}$$

La disuguaglianza richiesta si ottiene dalla (1) sommando le seguenti:

$$\sum bc - \frac{1}{2}\sum a^2 \geq 2\sqrt{3}\Delta \tag{2}$$

$$\frac{1}{4}\sum a^2 \geq \sqrt{3}\Delta \tag{3}$$

che discendono direttamente dalla disuguaglianza di Hadwiger-Finsler[1]

$$\sum a^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Si prova facilmente che l'uguaglianza vale se e solo se $\triangle ABC$ è equilatero. $\square$

(a) Poichè $b^2 + c^2 > 2bc$ abbiamo:

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right) - a^2}{4} \geq \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = s(s-a) \tag{4}$$

e analogamente si dimostra che:

$$m_b^2 \geq s(s-b) \qquad , \qquad m_c^2 \geq s(s-c) \tag{5}$$

Dalla disugualianza AM-GM, tenuto conto di (4), (5) e del Lemma 1, si ha:

$$\begin{aligned} m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a &\geq 3\sqrt[3]{m_a^2 \cdot m_b^2 \cdot m_c^2} = \\ &= 3\sqrt[3]{s^3(s-a)(s-b)(s-c)} = \\ &= 3\sqrt[3]{s^2\Delta^2} \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{3\sqrt{3}\Delta^3} = \\ &= 3\sqrt{3}\Delta \end{aligned}$$

e la disuguaglianza (a) è provata. $\square$

(b) Dalla formula della bisettrice, osservato che $2\sqrt{bc} \leq b + c$, abbiamo:

$$w_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)} \leq \sqrt{s(s-a)}$$

e, dato che $m_a \geq \sqrt{s(s-a)}$, ne segue che $w_a \leq m_a$. Analogamente si prova che:

$$m_a \geq w_a \qquad , \qquad m_b \geq w_b \qquad , \qquad m_c \geq w_c \tag{6}$$

La disuguaglianza (b) discende dalle (6) e dal Lemma 2:

$$m_a w_a + m_b w_b + m_c w_c \geq w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \geq 3\sqrt{3}\Delta$$

$\square$

[1] Vedi Problema n. 400 di TriangulosCabri, *Francisco Javier García Capitan, La desigualdad de Weitzenböck.*