Problema 495 de *triánguloscabri*. *Sea un triángulo ABC, Δ su área, m_a, m_b, m_c las longitudes de sus medianas y w_a, w_b, w_c las longitudes de sus bisectrices interiores. Demostrar las siguientes desigualdades:*

a) $m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a \geqslant 3\sqrt{3}\Delta$.

b) $m_a w_a + m_b w_b + m_c w_c \geqslant 3\sqrt{3}\Delta$.

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Comencemos por recordar la traslación paralela[1]. Dado el triángulo ABC, hallamos el punto simétrico D del vértice C respecto del punto medio del lado AB, y el punto simétrico E del vértice B respecto del vértice A.

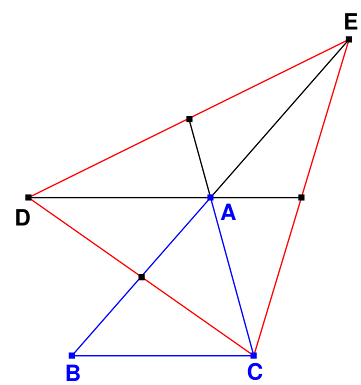

FIGURA 1

De esta manera obtenemos el triángulo CDE que tiene por lados

$$CD = 2m_c, \quad DE = 2m_b, \quad EC = 2m_a,$$

es decir, el doble de las medianas del triángulo ABC y área 3Δ, por lo que aplicando a este triángulo el refinamiento de la desigualdad de Weitzenböck[2]

$$ab + bc + ca \geqslant 4\sqrt{3}\Delta, \tag{1}$$

[1] Sobre este tema escribí en la Revista Latinoamericana de Geometría, de William Rodríguez Chamache, el artículo *Traslación Paralela en el Triángulo*. Este artículo puede encontrarse ahora en `http://garciacapitan.auna.com/escritos/tpt.pdf`.

[2] Ver una demostración, por ejemplo en el documento `http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/400garcapweitzenbock.pdf`.

y obtenemos

$$(2m_a)(2m_b) + (2m_b)(2m_c) + (2m_c)(2m_a) \geqslant 4\sqrt{3}\,(3\Delta)\,,$$

de donde resulta fácilmente el apartado (a).

Para demostrar (b), teniendo en cuenta que cada mediana es mayor que la correspondiente bisectriz, será suficiente demostrar que $w_a^2+w_b^2+w_c^2 \geqslant 3\sqrt{\Delta}$. Esta desigualdad aparece en el apartado 8.10 del libro *Geometric Inequalities* de Oene Bottema y otros (1969). La idea es observar que

$$w_a^2 = bc\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) = bc - a^2\cdot\frac{bc}{(b+c)^2}. \tag{2}$$

Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica deducimos que

$$\frac{bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{4\left(\frac{b+c}{2}\right)^2} \leqslant 1,$$

y llevado a (2) nos da

$$w_a^2 \geqslant bc - \frac{a^2}{4}.$$

Sumando todas las desigualdades parecidas,

$$w_a^2 + w_b^2 + w_c^2 \geqslant (ab+bc+ca) - \frac{(a^2+b^2+c^2)}{4}. \tag{3}$$

Ahora, usando la desigualdad de Hadwiger-Finsler, cuya demostración también podemos ver en el documento sobre la desigualdad de Weitzenböck mencionado anteriormente,

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 \geqslant& (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4\sqrt{3}\Delta \\ =& 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca+4\sqrt{3}\Delta \\ \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \leqslant& 2(ab+bc+ca)-4\sqrt{3}\Delta. \end{aligned}$$

y sustituyendo en (3) obtenemos, usando de nuevo (1),

$$\begin{aligned} w_a^2+w_b^2+w_c^2 \geqslant& (ab+bc+ca) - \frac{1}{4}\left(2(ab+bc+ca)-4\sqrt{3}\Delta\right) \\ \geqslant& \frac{1}{2}(ab+bc+ca)+\sqrt{3}\Delta \geqslant 2\sqrt{3}\Delta+\sqrt{3}\Delta = 3\sqrt{3}\Delta. \end{aligned}$$