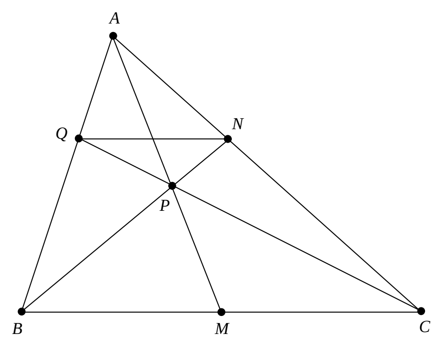
Problema 496. En un triángulo ABC, la mediana AM interseca a la bisectriz interior BN en P. Sea Q el punto de intersección de CP y AB. Demostrar que el triángulo BNQ es isósceles.

Propuesto por Dr. Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, Mathematical Reflections (2007, Issue 2, problem J43).

Soluzione di Ercole Suppa.



Dal teorema di Ceva abbiamo:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AQ}{QB} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{AQ}{QB} = \frac{AN}{CN}$$

e quindi, per proprietà del comporre

$$\frac{AB}{AQ} = \frac{AC}{AN}$$

Pertanto, per il secondo criterio di similitudine, $\triangle AQN$ ed $\triangle ABC$ sono simili. Ne segue che $QN \| BC$ per cui

$$\angle QNB = \angle NBC \quad \Longrightarrow \quad \angle QNB = \angle QBN \quad \Longrightarrow \quad QN = QB$$

e la dimostrazione è completa. $\square$