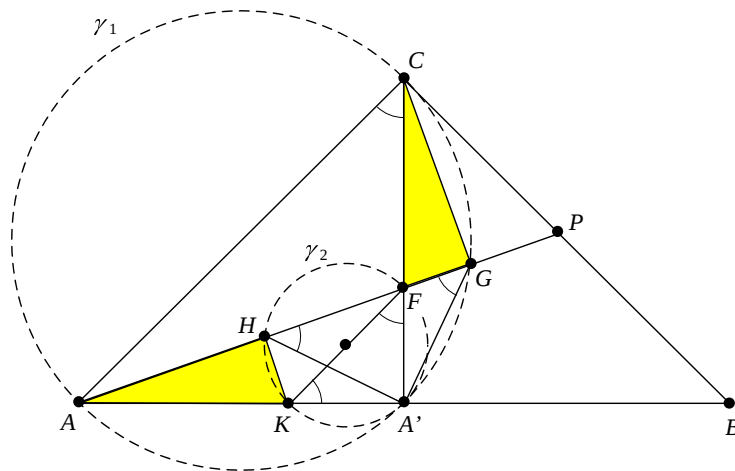


Problema 498. El triángulo isósceles ABC tiene un ángulo recto en C . Sea P un punto arbitrario del lado BC y sea G la proyección ortogonal del punto C sobre AP . Sea H el punto de AP tal que $AH = CG$. Sea A' el punto medio de AB . Hallar el valor del ángulo $\angle GA'H$.

Komal marzo 2007, B 3991.

Soluzione di Ercole Suppa. Dimostriamo che $\angle HA'G = 90^\circ$.



Sia $F = A'C \cap AP$ e sia K il punto di intersezione della perpendicolare ad AP in H con AB . Essendo $\angle AGC = \angle AA'C = 90^\circ$ il quadrilatero $AA'GC$ è ciclico, quindi:

$$\angle AGA' = \angle ACA' = 45^\circ \quad (1)$$

$$\angle A'CG = \angle FAA' \quad (2)$$

Dalla (2), tenuto conto che $AH = CG$, segue che i triangoli rettangoli $\triangle GCF$ e $\triangle HAK$ sono congruenti. Pertanto:

$$AK = CF \Rightarrow KA' = A'F \Rightarrow \angle FKA' = \angle KFA' = 45^\circ \quad (3)$$

Dalla (3) tenuto conto che il quadrilatero $HKA'F$ è ciclico abbiamo:

$$\angle FHA' = \angle FKA' = 45^\circ \quad (4)$$

Da (1) e (4) discende che $\angle HA'G = 90^\circ$ e ciò completa la dimostrazione. $\square$