

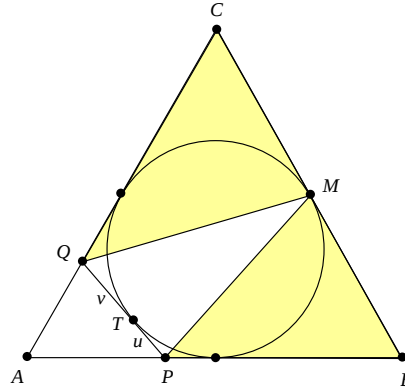
Problema 499. En un triángulo equilátero ABC , una recta tangente a la circunferencia inscrita corta a AB en P y a AC en Q . Sea M el punto medio de BC . Demostrar que

$$[ABC] = 6 \frac{[BPM][CQM]}{[BPM] + [CQM]}$$

Propuesto por Milton Favio Donaire Peña, Estudiante de la Universidad Nacional de Ingeniería Lima - Perú. Facultad de ciencias especialidad Física Pura. Asesor del equipo Olímpico del Perú en el curso de Geometría.

Soluzione di Ercole Suppa.

Consideriamo una retta tangente al cerchio inscritto che incontra AB in P ed AC in Q come in figura. Indichiamo con T il punto di tangenza e con a, u, v le lunghezze di AB, PT, TQ rispettivamente.



I triangoli $\triangle ABM$ e $\triangle PBM$ hanno la stessa altezza, pertanto il rapporto delle loro aree è uguale al rapporto delle basi:

$$[BPM] = [ABM] \cdot \frac{PB}{AB} = \frac{1}{2} \cdot [ABC] \cdot \frac{\left(\frac{a}{2} + u\right)}{a} = [ABC] \cdot \frac{a + 2u}{4a} \quad (1)$$

In modo analogo si dimostra che:

$$[CQM] = [ABC] \cdot \frac{a + 2v}{4a} \quad (2)$$

Da (1) e (2) discende che:

$$\begin{aligned} 6 \frac{[BPM][CQM]}{[BPM] + [CQM]} &= [ABC] \cdot 6 \cdot \frac{(a + 2u)(a + 2v)}{16a^2} \cdot \frac{2a}{a + u + v} = \\ &= [ABC] \cdot \frac{3a^2 + 6a(u + v) + 12uv}{4a(a + u + v)} \end{aligned} \quad (3)$$

Per completare la dimostrazione basta provare che:

$$\frac{3a^2 + 6a(u + v) + 12uv}{4a(a + u + v)} = 1$$

A tal fine, applicando il teorema del coseno al triangolo $\triangle APQ$, abbiamo:

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow$$

$$(u + v)^2 = \left(\frac{a}{2} - u\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - v\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - u\right)\left(\frac{a}{2} - v\right)$$

da cui, con semplici calcoli, si trova che a, u, v soddisfano la relazione:

$$12uv = a^2 - 2a(u + v) \tag{4}$$

Sostituendo $12uv$ con la (4) otteniamo:

$$\frac{3a^2 + 6a(u + v) + 12uv}{4a(a + u + v)} = \frac{4a^2 + 4a(u + v)}{4a(a + u + v)} = 1$$

e la dimostrazione è completa. □