Problema 499 de *triánguloscabri*. *En un triángulo equilátero ABC, una recta tangente a la circunferencia inscrita corta a AB en P y a AC en Q. Sea M el punto medio de BC. Demostrar que*

$$[ABC] = 3 \cdot \frac{2[BPM][CQM]}{[BPM]+[CQM]}.$$

Propuesto por Milton Favio Donaire Peña.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Nuestra solución generaliza el enunciado, ya que veremos que la fórmula es válida para un triángulo cualquiera, sustituyendo la circunferencia inscrita por la *elipse inscrita de Steiner*, que tiene su centro en el baricentro, y que es tangente a los lados en los puntos medios de éstos:

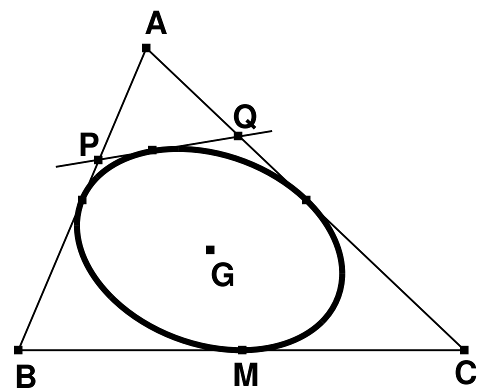

FIGURA 1

Usaremos coordenadas baricéntricas. Una recta $px+qy+rz=0$ corta a los lados AB y AC en los puntos $P=(q:-p:0)$ y $Q=(r:0:-p)$. Siendo $M=(0:1:1)$, calculamos las áreas (ver [1, pág. 15]):

$$\frac{[PBM]}{[ABC]} = \frac{1}{2(q-p)}\begin{vmatrix} q & -p & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{q}{2(q-p)},$$

$$\frac{[QMC]}{[ABC]} = \frac{1}{2(r-p)}\begin{vmatrix} r & 0 & -p \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{r}{2(r-p)},$$

de donde obtenemos, después de calcular un poco,

$$\frac{[BPM][CQM]}{[BPM]+[CQM]} = \frac{qr}{2(2qr-pq-pr)}[ABC],$$

e igualándolo a $\frac{1}{6}[ABC]$,

$$\frac{qr}{2(2qr-pq-pr)} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6qr = 4qr-2pq-2pr \Rightarrow pq+pr+qr=0.$$

de donde deducimos que la recta $px+qy+rz=0$ cumple la fórmula del enunciado si y solo si se cumple la relación

$$pq + pr + qr = 0. \tag{1}$$

Veamos que una recta cumple la condición (1) si y solo si es tangente a la elipse inscrita de Steiner.

La ecuación de esta elipse es (ver apartado 11.3.2 de [2])

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0.$$

Podemos comprobarlo viendo que la intersección con la recta $BC(x = 0)$ es la ecuación $(y - z)^2 = 0$, cuya solución doble es el punto medio $M = (0 : 1 : 1)$ de BC. Igual para los otros lados.

Por tanto, la matriz de la cónica es (ver apartado 10.5.2 de [2]):

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene por matriz adjunta (ver apartado 10.6.3 de [2]) a la matriz

$$\mathcal{M}^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

y la cónica dual de la elipse inscrita de Steiner es la cónica $xy + xz + yz = 0$, por lo que la recta la recta $px + qy + rz = 0$ será tangente a la elipse inscrita de Steiner si y solo si el punto $(p : q : r)$ está en su cónica dual, es decir, si y solo si $pq + pr + qr = 0$.

Entonces, en cualquier triángulo, una recta cumple la fórmula del enunciado si y solo si es tangente a su elipse inscrita de Steiner, y en el caso particular del triángulo equilátero esta elipse coincide con la circunferencia inscrita, así que el problema queda resuelto.

Referencias

[1] García Capitán, F. J. *Coordenadas baricéntricas.* Disponible en `http://garciacapitan.auna.com/baricentricas`.

[2] Yiu, Paul, Y. *Introduction to the Geometry of Triangle.* Disponible en `http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html`.