Problema 500. Sea ABC un triángulo y P, Q dos puntos del plano con triángulos cevianos $P_aP_bP_c$ y $Q_aQ_bQ_c$. Consideramos los puntos de intersección

$$\begin{array}{lclcl} X_a = P_bQ_c \cap PcQb & , & X_b = P_cQ_a \cap P_aQ_c & , & X_c = P_aQ_b \cap P_bQ_a, \\ U_a = P_bP_c \cap QbQc & , & U_b = P_cP_a \cap Q_cQ_a & , & U_c = P_aP_b \cap Q_aQ_b. \end{array}$$

Demostrar que:

(a) Los puntos X_a, X_b y X_c están todos sobre la recta PQ.

(b) Los puntos X_a, A, U_b y U_c están alineados, y la recta U_bU_c es la polar del punto A respecto de la cónica $ABCPQ$.

(c) Los triángulos ABC y $U_aU_bU_c$ son perspectivos.

(d) El centro de perspectiva de los triángulos ABC y $U_aU_bU_c$ es el punto de intersección de las polares trilineales de los puntos P y Q.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid y Francisco Javier García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba)

Soluzione di Ercole Suppa.
Utilizziamo coordinate baricentriche omogenee. Nello svolgimento dei calcoli abbiamo usato Mathematica ed il pacchetto `baricentricas.nb`, prelevabile dal sito di Francisco Javier García Capitán [1].

```
<< Baricentricas`;
```

(a) Introduciamo i punti del problema

```
ptP = {p, q, r}
```

$\{p, q, r\}$

```
ptQ = {u, v, w}
```

$\{u, v, w\}$

```
{ptPa, ptPb, ptPc} = TrianguloCeviano[ptP]
```

$\{\{0, q, r\}, \{p, 0, r\}, \{p, q, 0\}\}$

```
{ptQa, ptQb, ptQc} = TrianguloCeviano[ptQ]
```

$\{\{0, v, w\}, \{u, 0, w\}, \{u, v, 0\}\}$

```
ptXa = Punto[Recta[ptPb, ptQc], Recta[ptPc, ptQb]]
```

$\{-q\,r\,u^2 + p^2\,v\,w,\ q\,v\,(-r\,u + p\,w),\ r\,(-q\,u + p\,v)\,w\}$

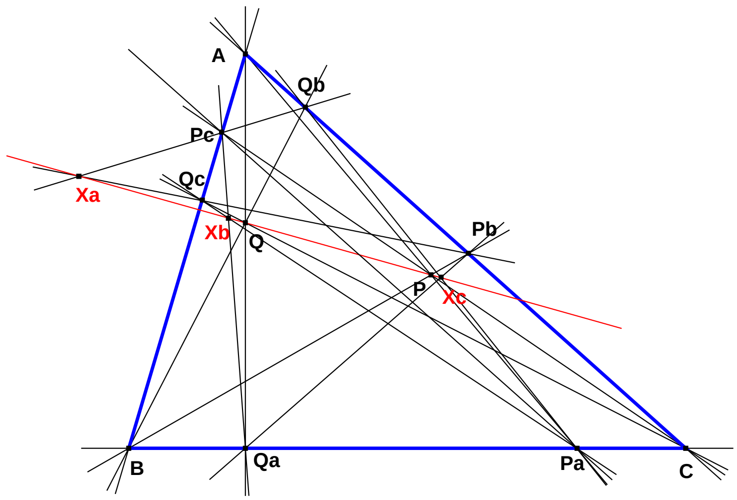
```
ptXb = Punto[Recta[ptPc, ptQa], Recta[ptPa, ptQc]]
```

$\{p\,u\,(-r\,v + q\,w),\ -p\,r\,v^2 + q^2\,u\,w,\ r\,(q\,u - p\,v)\,w\}$

```
ptXc = Punto[Recta[ptPa, ptQb], Recta[ptPb, ptQa]]
```

$\{p\,u\,(r\,v - q\,w),\ q\,v\,(r\,u - p\,w),\ r^2\,u\,v - p\,q\,w^2\}$

[1] http://garciacapitan.auna.com/baricentricas/



Per verificare che i punti X_a, X_b, X_c sono allineati usiamo la funzione booleana EstanAlineados :

```
EstanAlineados[{ptXa, ptXb, ptXc, ptP, ptQ}]
```

```
True
```

(b) Introduciamo i punti U_a, U_b, U_c e verifichiamone l'allineamento:

```
ptUa = Punto[Recta[ptPb, ptPc], Recta[ptQb, ptQc]]
```

```
{p u (r v - q w), q v (r u - p w), r (-q u + p v) w}
```

```
ptUb = Punto[Recta[ptPa, ptPc], Recta[ptQa, ptQc]]
```

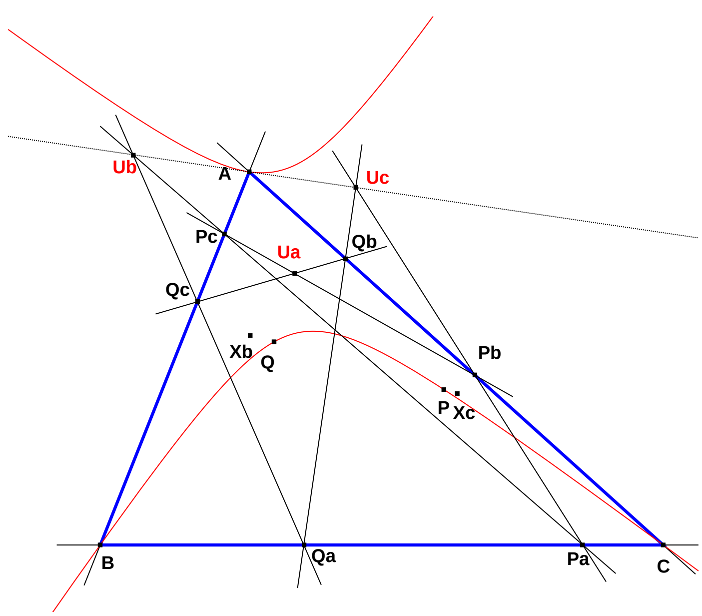
```
{p u (-r v + q w), q v (-r u + p w), r (-q u + p v) w}
```

```
ptUc = Punto[Recta[ptPa, ptPb], Recta[ptQa, ptQb]]
```

```
{p u (-r v + q w), q v (r u - p w), r (q u - p v) w}
```

```
EstanAlineados[{ptA, ptXa, ptUb, ptUc}]
```

```
True
```



Troviamo l'equazione della conica passante per i cinque punti A, B, C, P, Q e l'equazione della polare del punto A mediante le funzioni ConicaCincoPuntos e PolarConica :

```
conica = ConicaCincoPuntos[ptA, ptB, ptC, ptP, ptQ]
```

```
-q r u w x y + p r v w x y + q r u v x z - p q v w x z - p r u v y z + p q u w y z
```

```
PolarConica[ptA, conica]
```

```
{0, r (-q u + p v) w, q v (r u - p w)}
```

Verifichiamo che la retta U_bU_c coincide con la polare del punto A rispetto alla conica

```
rtUbUc = Recta[ptUb, ptUc]
```

```
{0, r (-q u + p v) w, q v (r u - p w)}
```

(c) Utilizziamo la funzione boolena SonPerspectivos per provare che i triangoli ABC e $U_aU_bU_c$ sono prospettivi

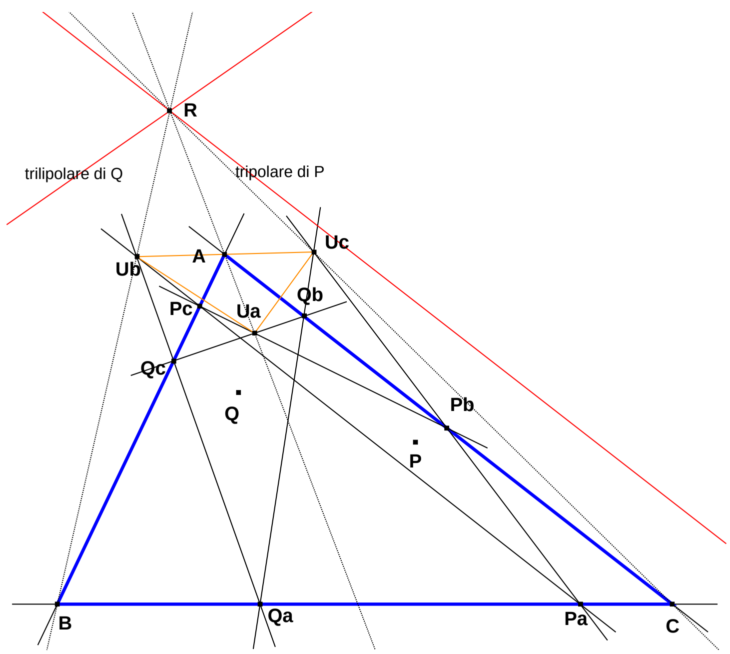
```
SonPerspectivos[{ptA, ptB, ptC}, {ptUa, ptUb, ptUc}]
```

```
True
```

e determiniamo il centro di prospettività R dei triangoli ABC e $U_aU_bU_c$ per mezzo della funzione Perspector:

```
ptR = Perspector[{ptA, ptB, ptC}, {ptUa, ptUb, ptUc}]
```

```
{p u (-r v + q w), q v (r u - p w), r (-q u + p v) w}
```



(d) Verifichiamo infine che il punto R coincide con il punto di intersezione delle tripolari dei punti P, Q che sono determinate mediante la funzione PolarTrilinear:

```
Punto[PolarTrilineal[ptP, {ptA, ptB, ptC}], PolarTrilineal[ptQ, {ptA, ptB, ptC}]]
```

```
{p u (r v - q w), q v (-r u + p w), r (q u - p v) w}
```