

Problema 501. Probar o refutar las siguientes proposiciones:

- (a) En todo triángulo ABC , al menos uno de los radios de las circunferencias exinscritas r_a, r_b, r_c es mayor o igual que una de sus alturas h_a, h_b, h_c y recíprocamente.
- (b) En todo triángulo ABC se pueden elegir, al menos, dos radios de las circunferencias exinscritas r_a, r_b, r_c cuyo producto sea mayor o igual que el producto de dos de sus alturas h_a, h_b, h_c .

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

Soluzione di Ercole Suppa.

Adottiamo le notazioni usuali, ossia denotiamo con a, b, c i lati BC, CA, AB , con A, B, C gli angoli, con R il raggio della circonferenza circoscritta, con r il raggio della circonferenza inscritta, con $r_i, h_i, m_i, w_i, (i = a, b, c)$ i raggi delle circonferenze exinscritte, le altezze, le mediane, le bisettrici interne, con s il semiperimetro e con Δ l'area del triangolo $\triangle ABC$.

Per dimostrare le proposizioni (a), (b) utilizzeremo le seguenti formule, la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio.

$$R = \frac{abc}{4\Delta} \quad (1)$$

$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = rr_ar_br_c \quad (2)$$

$$w_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \quad (3)$$

(a) Tenuto conto della (1), della (2) e della nota disuguaglianza $R \geq 2r$ abbiamo:

$$h_a h_b h_c = \frac{2\Delta}{a} \cdot \frac{2\Delta}{b} \cdot \frac{2\Delta}{c} = \frac{4\Delta}{abc} rr_ar_br_c = \frac{2r}{R} r_ar_br_c \leq r_ar_br_c \quad (4)$$

A questo punto la validità della proposizione (a) si può dimostrare per assurdo; infatti se la (a) fosse falsa si avrebbe:

$$r_a < h_a \quad , \quad r_b < h_b \quad , \quad r_c < h_c \quad \implies \quad r_ar_br_c < h_a h_b h_c$$

contraddicendo la (4). Pertanto la proposizione (a) è dimostrata. $\square$

(b) Dalla (3), usando la disuguaglianza tra la media aritmetica e la media geometrica ($GM \leq AM$), discende che:

$$w_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{2bc}{2\sqrt{bc}} \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{s(s-a)} \quad (5)$$

ed analoghe disuguaglianze valgono per w_b, w_c . Dalla (5) e dalla disuguaglianza $GM \leq AM$, tenuto conto che $h_a \leq w_a, h_b \leq w_b, h_c \leq w_c$, abbiamo:

$$\begin{aligned} h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a &\leq w_a w_b + w_b w_c + w_c w_a = \sum_{cyclic} s \sqrt{(s-a)(s-b)} \leq \\ &\leq s \sum_{cyclic} \frac{2s-a-b}{2} = s \sum_{cyclic} \frac{c}{2} = s^2 \end{aligned} \quad (6)$$

D'altra parte le formule sui raggi delle circonferenze exinscritte implicano che:

$$\begin{aligned} r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a &= \frac{\Delta}{s-a} \cdot \frac{\Delta}{s-b} + \frac{\Delta}{s-b} \cdot \frac{\Delta}{s-c} + \frac{\Delta}{s-c} \cdot \frac{\Delta}{s-a} = \\ &= s(s-c) + s(s-a) + s(s-b) = s^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Dalla (6) e la (7) otteniamo che:

$$h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a \quad (8)$$

Ora, come abbiamo fatto per la proposizione (a), possiamo dimostrare la proposizione (b) ragionando per assurdo; se la (b) fosse falsa si avrebbe:

$$r_a r_b < h_a h_b \quad , \quad r_b r_c < h_b h_c \quad , \quad r_c r_a < h_c h_a \quad \implies$$

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a < h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a$$

contraddicendo la (8). Pertanto la proposizione (b) è dimostrata. $\square$