En un triángulo $\widehat{ABC}$ sean B_1 y C_1 los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA}$ con CA y AB, respectivamente.

Sean V_a la intersección de B_1C_1 con BC y W_a la intersección de las bisectrices de los ángulos $\widehat{V_aC_1B}$ y $\widehat{V_aB_1C}$, demostrar que A, V_a y W_a están alineados.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{502}}$.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico "A. Einstein", 64100 Teramo, Italia; con el siguiente enunciado:

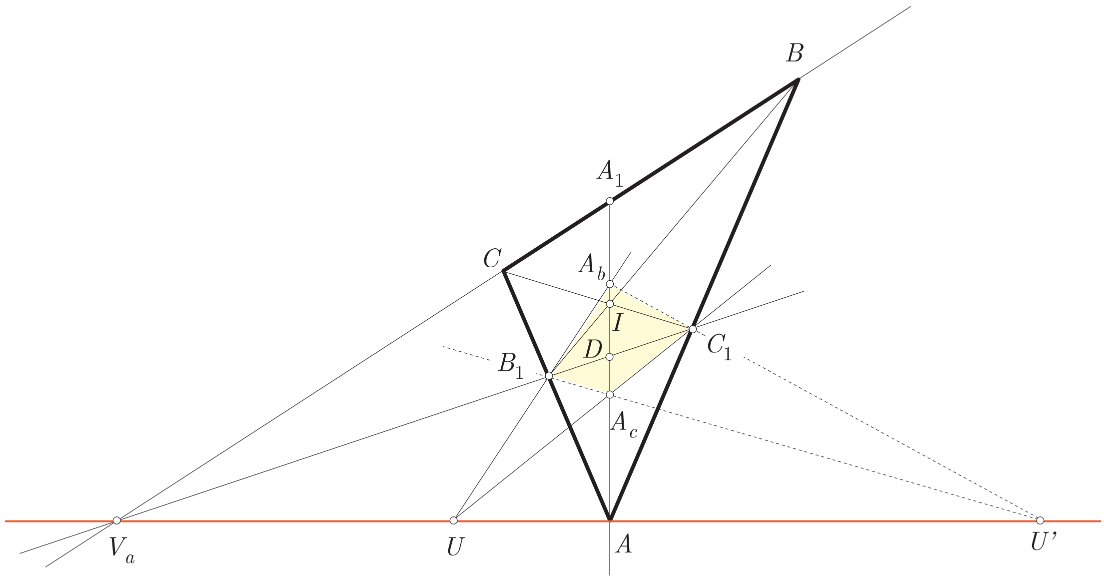
> *En un triángulo $\widehat{ABC}$ sean B_1 y C_1 los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA}$ con CA y AB, respectivamente.*
>
> *Sean V la intersección de B_1C_1 con BC y W la intersección de las bisectrices de los ángulos $\widehat{VC_1B}$ y $\widehat{VB_1C}$.*
>
> *Demostrar que A, V y W están alineados.*

—— - ——

Recordemos, previamente, una propiedad conocida de los cuadrivértices completos, que utilizaremos en la solución de este ejercicio:

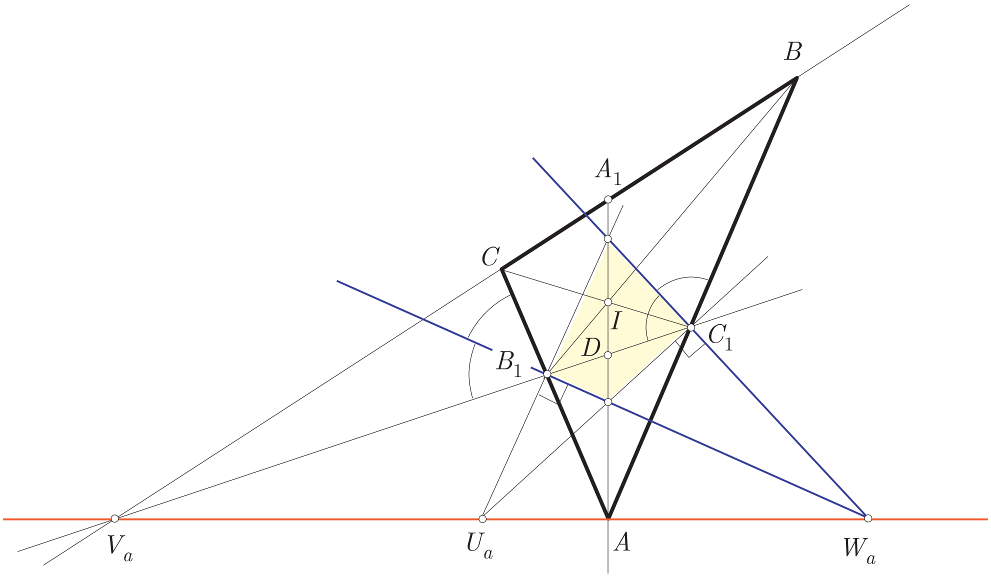
"En cualquier cuadrivértice dos puntos diagonales son conjugados armónicos de los dos puntos en que la recta que los une corta a los dos lados opuestos del cuadrivértice que pasan por el tercer punto diagonal."

Resultado que nos da una pauta para construir el cuarto armónico
(http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/gdh.pdf#h-cuartoarmonico).



Dado un punto U en la recta AV_a, consideremos el cuadrivértice completo (usando puntos del enunciado del ejercicio) que tiene como puntos diagonales A, V_a y $D = AA_1 \cap B_1C_1$ y vértices $B_1, C_1, A_b = AA_1 \cap UB_1$ y $A_c = AA_1 \cap UC_1$. Entonces las rectas A_bC_1 y A_cB_1 se cortan en el punto U', sobre AV_a, que es el conjugado armónico de U respecto a A y V_a.

Entre los pares de rectas B_1U y B_1U', solamente hay uno en que las rectas que lo forman, B_1U_a y $B_1U'_a$, son perpendiculares; y como la razón doble de este par de rectas y el par de formado por las rectas B_1A y B_1V_a es -1, las rectas B_1U_a y $B_1U'_a$ son las bisectrices exterior e interior del ángulo $\widehat{V_aB_1C}$.



Lo mismo ocurre, cuando tomamos rectas por C_1; es decir, existe un único punto U, en AV_a, tal que las rectas C_1U y C_1U' son perpendiculares y, por consiguiente, son las bisectrices exterior e interior, respectivamente, del ángulo $\widehat{V_aC_1B}$. **Debemos establecer que este punto U coincide con** U_a y, por tanto, el conjugado armónico de U_a, respecto a A y V_a es el punto $U'_a = W_a$ del enunciado. Para probar que coinciden usaremos coordenadas baricéntricas, lo cual nos da, de paso, las coordenadas de U_a y W_a.

—— - ——

En un sistema de coordenadas baricéntricas, referidas a $\widehat{ABC}$, los puntos de intersección de sus bisectrices con los lados son:

$$A_1(0 : b : c), \qquad B_1(a : 0 : c), \qquad C_1(a : b : 0).$$

La ecuación de la recta B_1C_1 es $bcx - cay - abz = 0$ y el punto de intersección de ésta con el lado BC es $V_a(0 : b : -c)$.

Tomemos en la recta AV_a un punto $U(b - c : \rho b : -\rho c)$ que divide al segmento AV_a en la razón $AU : UV_a = \rho$ (si $\rho > 0$, U está entre A y V_a). El conjugado armónico de U, respecto a A y V_a es $U'(b - c : -\rho b : \rho c)$.

Necesitamos, para los cálculos siguientes, las condiciones de perpendicularidad en coordenadas baricéntricas, noción que puede consultarse, por ejemplo, en:

Paul Yiu.- Introduction to the Geometry of the Triangle.
http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps, §4.5 Perpendicular lines, pag. 54.

A. Montesdeoca.- Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos.
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf#perp

Fco. J. García Capitán.- Giros con baricéntricas.
http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol309garcap/sol309garcap.pdf

Así como rutinas del cuaderno "baricentricas.nb" de MATHEMATICA de Fco. J. García Capitán.- Coordenadas baricéntricas. http://garciacapitan.auna.com/baricentricas/

La perpendicular por B_1 a la recta B_1U $(bc\rho x - c(b - c + a\rho)y - ab\rho z = 0)$ es:

$$bc\,(2bc(b-c) + (2abc + (a-c)(a-b+c)(a+b+c))\,\rho)\,x +$$

$$c(a-b+c)(a+b+c)((a-c)(b-c) + a(a+2b-c)\rho)y -$$

$$ab\,(2bc(b-c) + (2abc + (a-c)(a-b+c)(a+b+c))\,\rho)\,z = 0.$$

El punto U' está en esta recta si

$$\rho = \pm\frac{(b-c)\sqrt{bc}}{\sqrt{a(abc + (a-b+c)(a+b-c)(a+b+c))}}.$$

Si ahora tomamos la perpendicular por C_1 a la recta C_1U $(bc\rho x - ca\rho y - b(c - b + a\rho)z = 0)$, que tiene por ecuación:

$$(-2b^2c^2(b-c) + bc(2abc + (a-b)(a+b-c)(a+b+c))\rho)x +$$

$$(2abc^2(b-c) - ac(2abc + (a-b)(a+b-c)(a+b+c))\rho)y +$$

$$(-b(a-b)(b-c)(a+b-c)(a+b+c)+ab(a+b-c)(a+b+c)(a-b+2c)\rho)z=0.$$

y exigimos que U' esté en ella, se obtienen las mismas soluciones para ρ que anteriormente.

Usando la notación $\Omega_a = abc+(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)$, los puntos de intersección con AV_a de las bisectrices (interiores y exteriores) de $\widehat{V_aB_1C}$ y de $\widehat{V_aC_1B}$, que se determinan sustituyendo los valores de ρ obtenidos en las coordenadas de U y U', son:

$$\left(\sqrt{a\Omega_a} : -b\sqrt{bc} : c\sqrt{bc}\right), \qquad \left(\sqrt{a\Omega_a} : b\sqrt{bc} : -c\sqrt{bc}\right),$$

que corresponden a U_a ó a W_a, en ambas bisectrices exteriores o interiores, según que el valor de ρ sea positivo o negativo, respectivamente.

—— - ——

Algunas notas adicionales:

• Si procedemos cíclicamente sobre los lados del triángulo $\widehat{ABC}$, tomando $V_b = CA \cap C_1A_1$ y $V_c = AB \cap A_1B_1$, obtenemos pares de puntos en las rectas BV_b y CV_c, (U_b, W_b) y (U_c, W_c), respectivamente, con las mismas propiedades que el par (U_a, W_a). Sus coordenadas son:

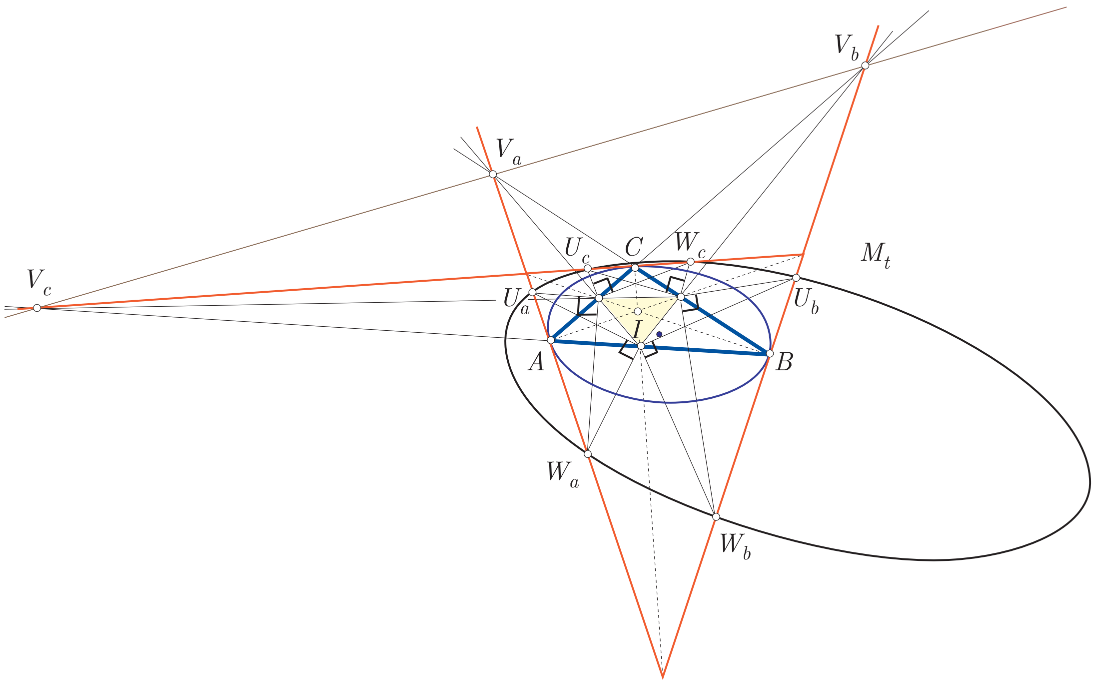
$$\left(a\sqrt{ca} : \sqrt{b\Omega_b} : -c\sqrt{ca}\right), \quad \left(-a\sqrt{ca} : \sqrt{b\Omega_b} : c\sqrt{ca}\right), \qquad \left(-a\sqrt{ab} : b\sqrt{ab} : \sqrt{c\Omega_c}\right), \quad \left(a\sqrt{ab} : -b\sqrt{ab} : \sqrt{c\Omega_c}\right).$$

Ocurre que los puntos U_a, U_b, U_c, W_a, W_b y W_c están en una cónica de ecuación:

$$\begin{gathered}8sS^2\left(b^2c^2(-a+b+c)x^2+c^2a^2(a-b+c)y^2+a^2b^2(a+b-c)z^2\right)+\\ \left(a^2b^2c^2\left(2abc-\Omega_a-\Omega_b-\Omega_c\right)+\Omega_a\Omega_b\Omega_c\right)(ayz+bzx+cxy)=0.\end{gathered} \tag{1}$$

siendo, s el semiperímetro y S el doble del área de $\widehat{ABC}$.

• Las rectas AV_a, BV_b y CV_c son las tangentes en los vértices de $\widehat{ABC}$ a la cónica circunscrita con perspector el incentro (de centro el punto intermedio $M_t\,(a(b+c-a) : c(c+a-b) : c(a+b-c))$) y los puntos V_a, V_b y V_c están alineados, en la polar del incentro, respecto a dicha cónica; que es también la polar trilineal del incentro, respecto a $\widehat{ABC}$.



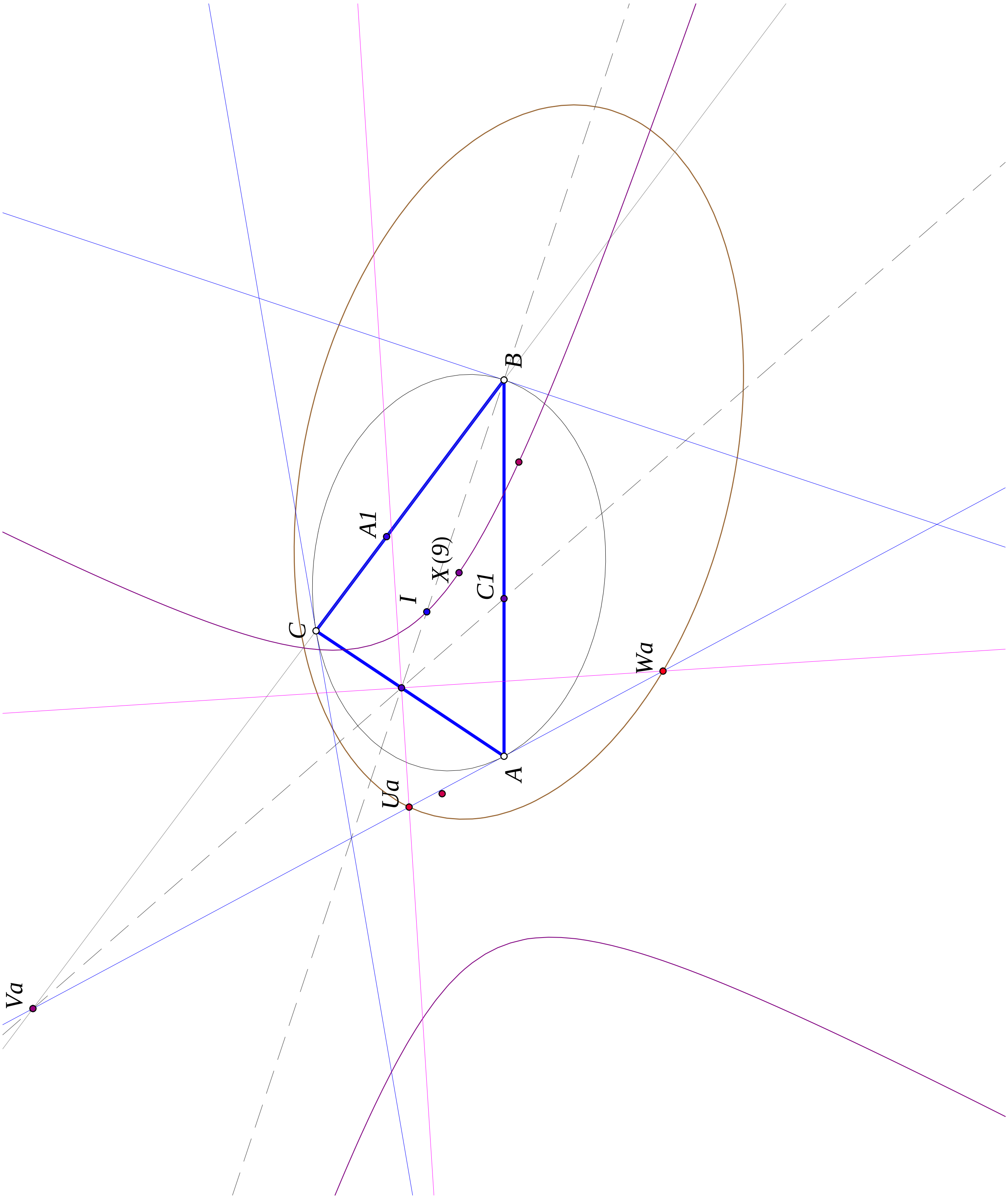
• La cónica (1) pertenece al haz de cónicas determinado por la cónica circunscrita de perspector el incentro, $ayz+bzx+cxy=0$, y la elipse imaginaria

$$b^2c^2(-a+b+c)x^2+c^2a^2(a-b+c)y^2+a^2b^2(a+b-c)z^2=0.$$

El lugar geométrico de los centros de las cónicas de este haz es la cónica de ecuación:

$$b^2c^2(b-c)(b+c-a)x^2+c^2a^2(c-a)(c+a-b)y^2+a^2b^2(a-b)(a+b-c)z^2-abc(a+b+c)\big(a(b-c)yz+b(c-a)zx+c(a-b)xy\big)=0.$$

La gráfica(1) que se muestra a continuación está generada directamente con MATHEMATICA, usando una ligera modificación (2) de la rutina GraficaBaricentricas del cuaderno "baricentricas.nb" de García Capitán. En esta gráfica se añade, respecto a las anteriores figuras, la cónica lugar de los centros de las cónicas del haz, así como de su centro.



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2355.pdf

(1) http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/gtr2355c.eps
(2) http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/etc.nb