

Problema 502. En un triángulo ABC sean B_1 y C_1 los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos ABC y BCA con AC , AB respectivamente. Sea V la intersección de B_1C_1 con BC . Sea W la intersección de las bisectrices de los ángulos VC_1B y VB_1C . Demostrar que A , V , W están alineados.

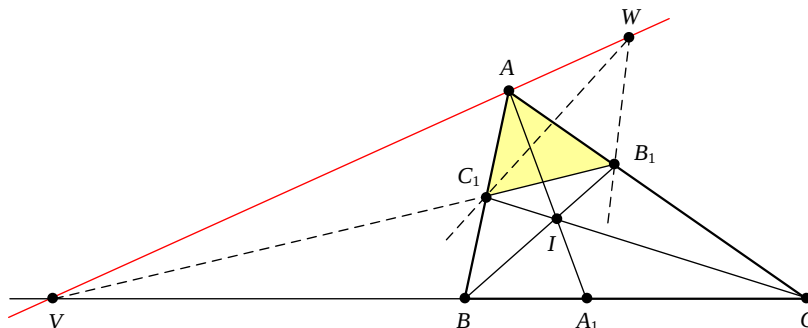
Propuesto por Ercole Suppa, profesor titular de matemáticas y física del Liceo Scientifico A. Einstein, 64100 Teramo, Italia

Soluzione di Ercole Suppa. Premettiamo il seguente lemma:

LEMMA. In un triangolo le bisettrici, interna ed esterna, di uno stesso angolo intersecano la retta contenente il lato opposto in due punti armonici coniugati rispetto agli estremi di detto lato.

Dimostrazione. La proprietà si discende direttamente dai teoremi della bisettrice interna ed esterna. ■

Per dimostrare il risultato richiesto, posto $A_1 = AI \cap BC$, $V^* = WA \cap BC$, è sufficiente far vedere che $V = V^*$.



Dalla nota costruzione del quarto armonico, discende che V è il coniugato armonico di A_1 rispetto a BC . D'altra parte, osservato che W è l'excentro di $\triangle AB_1C_1$ relativo a C_1 abbiamo che AW è la bisettrice esterna dell'angolo $\angle BAC$ e quindi, per il LEMMA, il punto $V^* = AW \cap BC$ è il coniugato armonico di A_1 rispetto a BC . Dall'unicità del coniugato armonico, abbiamo che $V = V^*$ e questo prova l'allineamento dei punti W , A , V . □