**Problema 503.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo, y $AH_a$, la altura desde $A$ a $BC$.(Similares construcciones se harían para los vértices $B$ y $C$). Sean los puntos $B_a$ y $C_a$, tomados desde $C$ y $B$ interiormente sobre los lados $AC$ y $AB$, respectivamente, tales que $CH_a = CB_a$, y $BH_a = BC_a$. Construimos los puntos $D_a$ y $E_a$, sobre $BC$, tales que los triángulos $CB_aD_a$, y $BC_aE_a$ sean rectángulos en $B_a$ y $C_a$, respectivamente. Si definimos los puntos $F_a = B_aD_a \cap AB$, y $G_a = C_aE_a \cap AC$, y similares puntos para los otros vértices $B$ y $C$. Probar que :

(a) $B_aD_a = C_aE_a = AH_a$ (vértice $A$) ; $C_bE_b = A_bD_b = BH_b$ (vértice $B$); $A_cE_c = B_cD_c = CH_c$ (vértice $C$).

(b) Triángulos $AB_aC_a$ y $AF_aG_a$, son semejantes, y hallar los elementos de la semejanza.

(c) Si $O_aP_aQ_a$ es el triángulos formado por $O_a = B_aD_a \cap C_aE_a$, $P_a = B_aD_a \cap AH_a$, $Q_a = C_aE_a \cap AH_a$, es semejante al triángulo $ABC$.

(d) Los puntos $O_a = B_aD_a \cap C_aE_a$, similar para $O_b$, y $O_c$, son los ortocentros de cada uno de los triángulos $AF_aG_a$, $BF_bG_b$ y $CF_cG_c$, respectivamente.

(e) ¿ Qué relación geométrica tiene el triángulo $O_aO_bO_c$ con el triángulo $ABC$?. Es decir, ¿son semejantes?

*Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid*

**Soluzione di Ercole Suppa**.
Utilizziamo coordinate baricentriche omogenee e svolgiamo i calcoli con MATHEMATICA ed il pacchetto `baricentricas.nb`, prelevabile dal sito di Francisco Javier García Capitán [1].

```
<< Baricentricas`;
```

Introduciamo i punti del problema:

```
{ptHa, ptHb, ptHc} = TrianguloPedal[ptH]
```

$\{\{0, -a^2 - b^2 + c^2, -a^2 + b^2 - c^2\}, \{-a^2 - b^2 + c^2, 0, a^2 - b^2 - c^2\}, \{-a^2 + b^2 - c^2, a^2 - b^2 - c^2, 0\}\}$

```
{ptCa, ptBa} = Map[SimetriaAxial[ptHa, Recta[#, ptI]] &, {ptB, ptC}]
```

$\{\{-a^2 + b^2 - c^2, a^2 - b^2 - 2\,a\,c + c^2, 0\}, \{a^2 + b^2 - c^2, 0, -a^2 + 2\,a\,b - b^2 + c^2\}\}$

```
{ptEa, ptDa} = MapThread[Punto[rtBC, Perpendicular[#1, #2]] &, {{ptCa, ptBa}, {rtAB, rtCA}}]
```

$\{\{0, a - c, c\}, \{0, -b, -a + b\}\}$

```
{ptFa, ptGa} =
 MapThread[Punto[Recta[#1, #2], #3] &, {{ptBa, ptCa}, {ptDa, ptEa}, {rtAB, rtCA}}]
```

$\{\{(a - b)\,(a^2 + b^2 - c^2), b\,(a^2 - 2\,a\,b + b^2 - c^2), 0\}, \{(a - c)\,(a^2 - b^2 + c^2), 0, c\,(a^2 - b^2 - 2\,a\,c + c^2)\}\}$

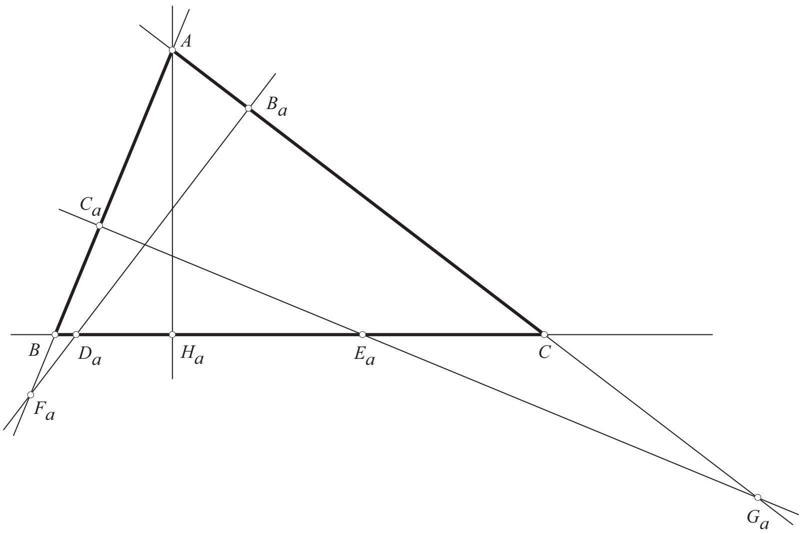


FIGURA 1

[1] http://garciacapitan.auna.com/baricentricas/

(a) Per calcolare le lunghezze dei segmenti utilizziamo la funzione CuadradoDistancia:

```
CuadradoDistancia[ptBa, ptDa] - CuadradoDistancia[ptCa, ptEa]
```

```
0
```

```
CuadradoDistancia[ptBa, ptDa] - CuadradoDistancia[ptA, ptHa]
```

```
0
```

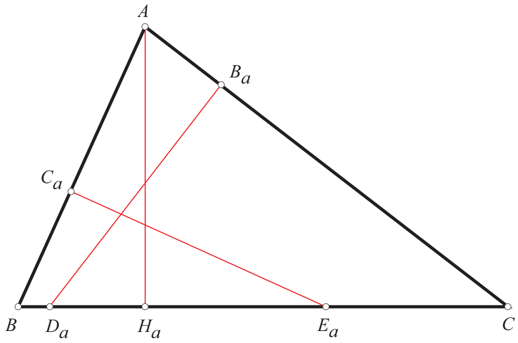


Figura 2

(b) Per verificare i triangoli $AB_aC_a$ y $AF_aG_a$ sono simili utilizziamo la funzione boolena SonSemejantes

```
SonSemejantes[{ptA, ptBa, ptCa}, {ptA, ptFa, ptGa}]
```

```
True
```

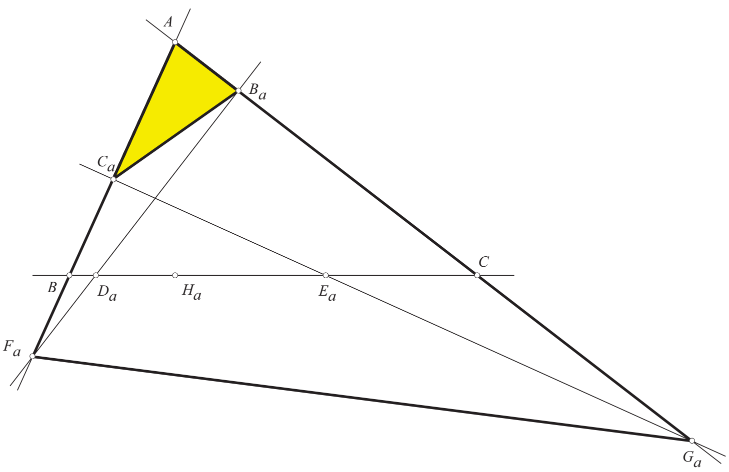


Figura 3

Dato che

```
Simplify[Sqrt[Divide[CuadradoDistancia[ptBa, ptCa], CuadradoDistancia[ptFa, ptGa]]],
  {b > 0, c > 0, b^2 + c^2 - a^2 > 0}]
```

$$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2\,b\,c}$$

il rapporto di similitudine è

$$\frac{B_aC_a}{F_aG_a} = \cos A$$

(c) Calcoliamo le coordinate baricentriche dei punti $O_a$, $P_a$, $Q_a$:

```
ptOa = Punto[Recta[ptBa, ptDa], Recta[ptCa, ptEa]]
```

$$\left\{a^4-\left(b^2-c^2\right)^2,\ b\left(a^3-a(b-c)^2+a^2(-b+c)+(b-c)(b+c)^2\right),\ c\left(a^3+a^2(b-c)-a(b-c)^2-(b-c)(b+c)^2\right)\right\}$$

```
ptPa = Punto[Recta[ptBa, ptDa], Recta[ptA, ptHa]]
```

$$\left\{-a\left(a^2+b^2-c^2\right),\ -b\left(a^2+b^2-c^2\right),\ -b\left(a^2-b^2+c^2\right)\right\}$$

```
ptQa = Punto[Recta[ptCa, ptEa], Recta[ptA, ptHa]]
```

$$\left\{a\left(a^2-b^2+c^2\right),\ c\left(a^2+b^2-c^2\right),\ c\left(a^2-b^2+c^2\right)\right\}$$

ed utilizziamo la funzione SonSemejantes per verificare la similitudine tra i triangoli $O_aP_aQ_a$ ed $ABC$:

```
SonSemejantes[{ptOa, ptPa, ptQa}, {ptA, ptB, ptC}]
```

$$\frac{(b-c)^3(-a+b+c)^3\left(b^3+b^2c+bc^2+c^3\right)}{a^2(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}==0\ \&\&\ \frac{(a-b-c)^3(b-c)^2\left(-b^2+c^2\right)}{(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}==0$$

```
SonSemejantes[{ptOa, ptPa, ptQa}, {ptA, ptC, ptB}]
```

```
True
```

Pertanto risulta che $\triangle ABC$ ed $\triangle O_aP_aQ_a$ sono inversamente simili.

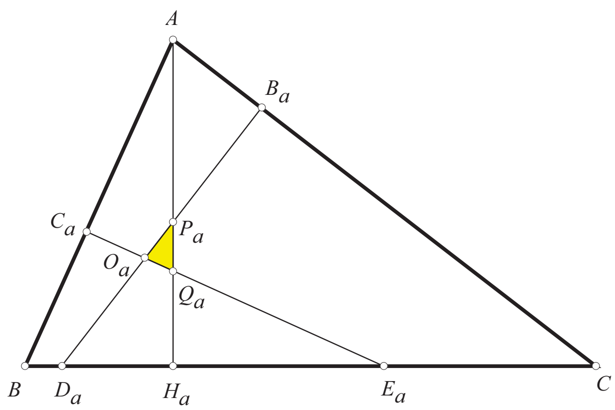


Figura 4

Calcoliamo il rapporto di similitudine:

```
Divide[CuadradoDistancia[ptOa, ptPa], CuadradoDistancia[ptA, ptC]]
```

$$-\frac{(a-b-c)^3(b-c)^2}{a^2(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}$$

Da questa espressione, tenendo conto della formula di Erone:

$$\Delta=[ABC]=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{1}{4}(a+b+c)(b+c-a)((a-b-c)(a+b-c)$$

abbiamo che:

$$\frac{O_aP_a}{AC}=\sqrt{\frac{(b+c-a)^3(b-c)^2}{a^2(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}}=\frac{|b-c|\,(b+c-a)^2}{4a\Delta}$$

(d) Per verificare che $O_a$ è l'ortocentro del triangolo $AF_aG_a$ ricorriamo alla funzione Ortocentro:

```
Ortocentro[{ptA, ptFa, ptGa}]
```

$\{a^4 - (b^2 - c^2)^2,\ b\,(a^3 - a\,(b-c)^2 + a^2\,(-b+c) + (b-c)\,(b+c)^2),$
$c\,(a^3 + a^2\,(b-c) - a\,(b-c)^2 - (b-c)\,(b+c)^2)\}$

```
ptOa == Ortocentro[{ptA, ptFa, ptGa}]
```

True

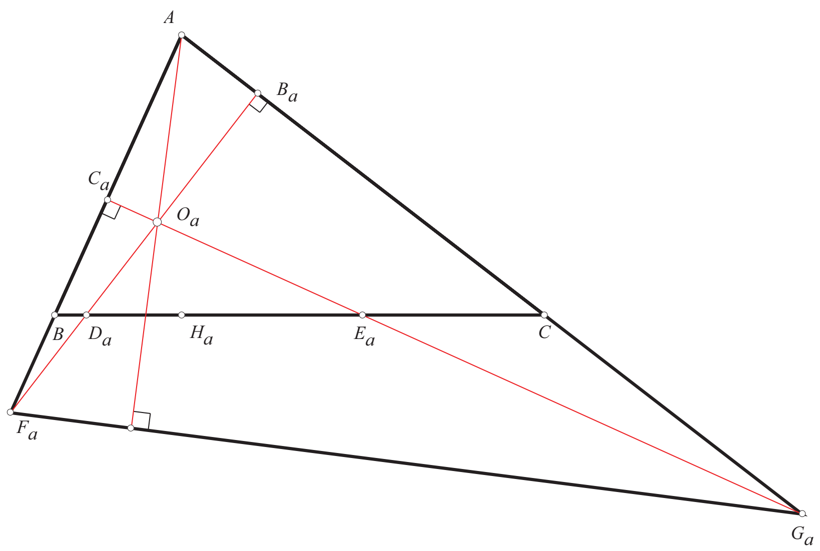


Figura 5

In modo analogo si esegue la verifica per i punti $O_b$, $O_c$.

(e) Per calcolare le coordinate baricentriche dei punti $O_b$, $O_c$ possiamo usare la funzione PermutarTerna:

```
ptOb = PermutarTerna[ptOa]
```

$\{a\,(b^3 + b^2\,(-a+c) - b\,(-a+c)^2 - (-a+c)\,(a+c)^2),$
$b^4 - (-a^2 + c^2)^2,\ c\,(b^3 + b^2\,(a-c) - b\,(-a+c)^2 + (-a+c)\,(a+c)^2)\}$

```
ptOc = PermutarTerna[ptOb]
```

$\{a\,((a-b)\,(a+b)^2 - (a-b)^2\,c + (-a+b)\,c^2 + c^3),$
$b\,(-(a-b)\,(a+b)^2 - (a-b)^2\,c + (a-b)\,c^2 + c^3),\ -(a^2 - b^2)^2 + c^4\}$

Utilizzando la funzione SonSemejantes si verifica che, in generale, i triangoli $\triangle O_aO_bO_c$ e $\triangle ABC$ non sono simili. Tuttavia mediante la funzione SonPerspectivos si può constatare che essi sono prospettivi:

```
SonPerspectivos[{ptOa, ptOb, ptOc}, {ptA, ptB, ptC}]
```

True

Per trovare il centro di prospettività $P$ utilizziamo la funzione Perspector

```
ptP = Perspector[{ptOa, ptOb, ptOc}, {ptA, ptB, ptC}]
```

$$\{a\,(a^6 - 3\,a^4\,(b-c)^2 - (b-c)^2\,(b+c)^4 + a^2\,(b-c)^2\,(3\,b^2 + 2\,b\,c + 3\,c^2)),\ b\,(-a^6 - 2\,a^5\,c + (b^2-c^2)^3 + a^4\,(3\,b^2+c^2) + a^3\,(-4\,b^2\,c + 4\,c^3) + a^2\,(-3\,b^4 + 2\,b^2\,c^2 + c^4) + a\,(6\,b^4\,c - 4\,b^2\,c^3 - 2\,c^5)),\ c\,(-a^6 - 2\,a^5\,b - (b^2-c^2)^3 + a^4\,(b^2 + 3\,c^2) + 4\,a^3\,(b^3 - b\,c^2) + a^2\,(b^4 + 2\,b^2\,c^2 - 3\,c^4) - 2\,a\,(b^5 + 2\,b^3\,c^2 - 3\,b\,c^4))\}$$

Per vedere se $P$ è un punto conosciuto calcoliamo in suo `search number` mediante la funzione Kimberling

```
Kimberling[ptP]
```

```
-52.7703752
```

Da una ricerca sull'Enciclopedia di Clark Kimberling [2] troviamo che il centro di prospettività $P$ è il punto $X_{84}$ (=coniugato isogonale del punto di Bevan $X_{40}$) e che esso appartiene alla cubica di Darboux.

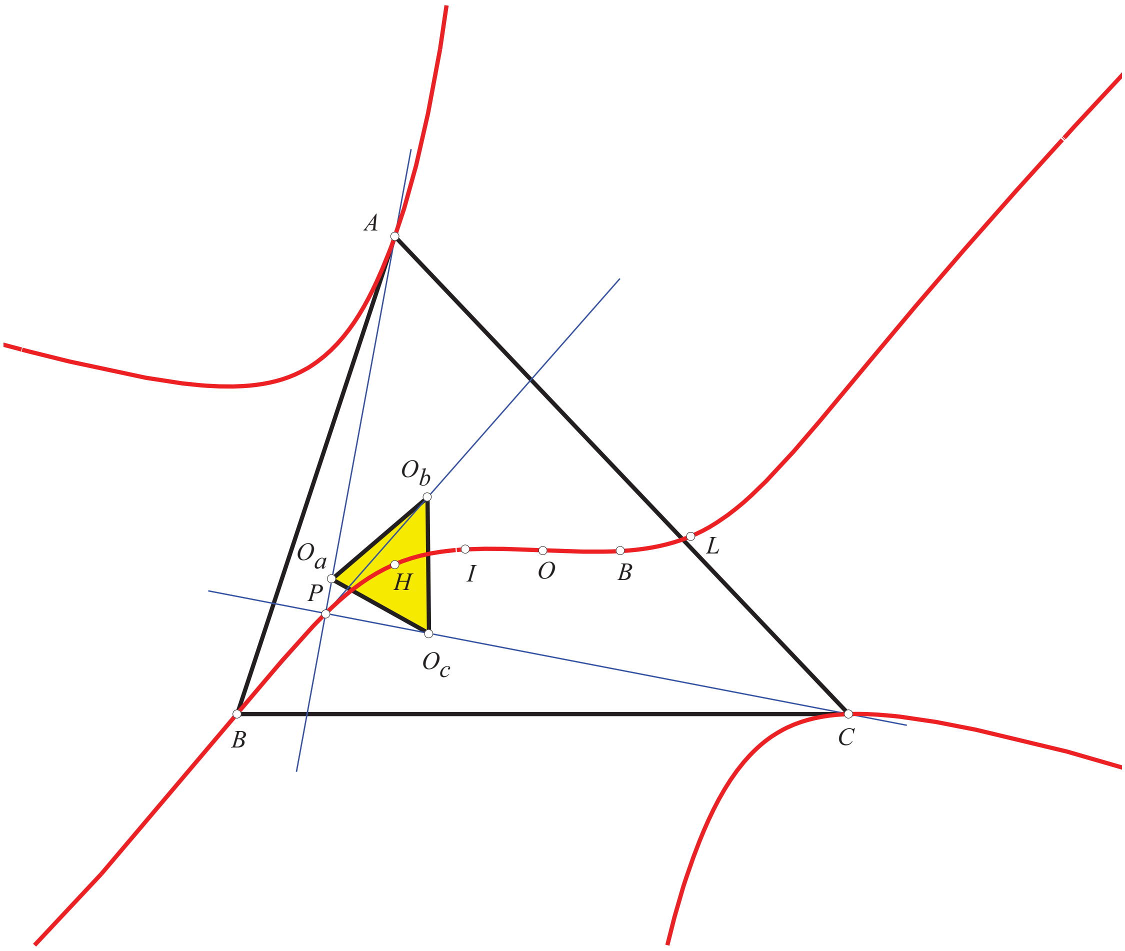


Figura 6

[2] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html