Problema 504

24. Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

(a) Demuestre que OA es perpendicular a PQ.

(b) Si M es el punto medio de BC, pruebe que $AP^2 = 2\ AD \cdot OM$.

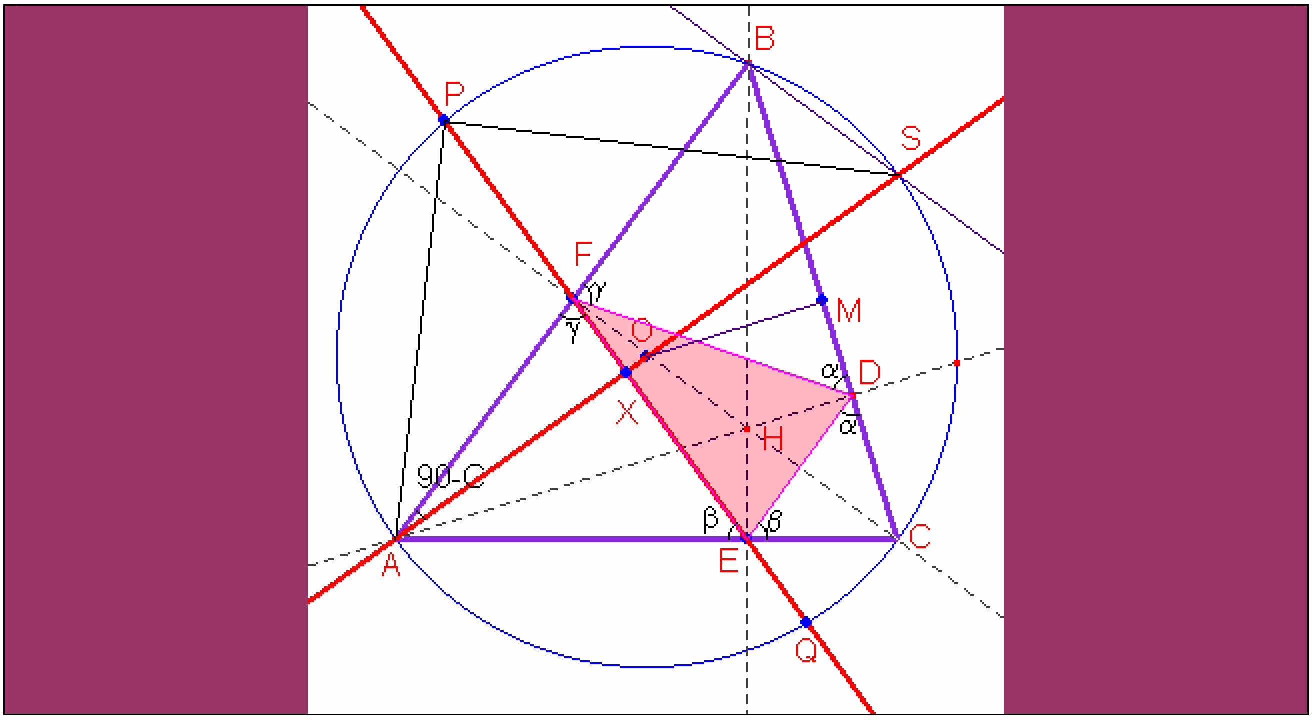
Herbert, J. (2000): Revista de Matemática de [La Universidad del Zulia](#) [Facultad de Ciencias](#) / [Departamento de Matemáticas](#) Vol 8, 1

http://www.emis.de/journals/DM/v81/pys.pdf

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba, España.

(a) Demuestre que OA es perpendicular a PQ.

En el triángulo ABC, al construir los segmentos solicitados, obtenemos su correspondiente triángulo órtico DEF. Sabemos que el ortocentro H del triángulo ABC es el incentro del triángulo órtico DEF. Razonaremos a continuación que los ángulos en E, F y G a un lado y otro deben ser iguales



Nos apoyaremos en las propiedades del triángulo órtico. A saber, las alturas del triángulo ABC son las bisectrices de su triangulo órtico DEF. De ahí que sean iguales los ángulos sobre el lado BC, AC y AB. Vamos a llamar a estos ángulos α, β, y γ, respectivamente.

Según esto, los tres triángulos (aparte del órtico) que se forman en ABC nos conducen a las siguientes ecuaciones con las medidas de sus ángulos:

$\alpha+\beta = 180-C=A+B$
$\alpha+\gamma = 180-B=A+C$
$\beta+\gamma = 180-A=B+C$

Sumando todas las ecuaciones y reduciendo una a una, obtenemos del sistema de ecuaciones, una vez resuelto, las soluciones: $\alpha=A$; $\beta=B$; $\gamma=C$.

Por otro lado, si prolongamos el radio AO hasta el punto S, obtenemos el triángulo ABS, rectángulo en B, y cuyo ángulo en S es igual al ángulo C. Por tanto, el ángulo en A del triángulo ABS será igual 90º−C. De esta forma, el ángulo en X será de 90º.

Así, la recta OA es perpendicular a PQ

(b) Si M es el punto medio de BC, pruebe que $AP^2 = 2\ AD\cdot OM$.

Por el apartado (a), tenemos que $AP^2 = AX\cdot 2R$ (Teorema del cateto en el triángulo rectángulo APB).

En los triángulo AXE y ABE, tenemos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}B = \dfrac{AX}{AE} \\ \cos A = \dfrac{AE}{c} \end{cases} \rightarrow AX = c.\operatorname{sen}B.\cos A$$

Por tanto:

$$AP^2 = AX\cdot 2R = c.\operatorname{sen}B.\cos A.\,2R = c.\operatorname{sen}B.\cos A.\frac{b}{\operatorname{sen}B} = b.c.\cos A.$$

$\mathbf{AP^2} = b\cdot c\cdot \cos A$

De los triángulos ACD y OMB, tenemos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}C = \dfrac{AD}{b} \\ \cos A = \dfrac{OM}{R} \end{cases} \rightarrow 2.OM.AD = (2R.\cos A).(b.\operatorname{sen}C) = b.c.\cos A$$

Por tanto:

$$2.OM.AD = (2R.\cos A).(b.\operatorname{sen}C) = b.c.\cos A$$

2 AD·OM= $b\cdot c\cdot \cos A$

Se verifica, en efecto, la relación $\mathbf{AP^2 = 2\ AD\cdot OM}$.