Problema 504. Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

(a) Demuestre que OA es perpendicular a PQ.

(b) Si M es el punto medio de BC, pruebe que $AP^2 = 2 \cdot AD \cdot OM$.

Herbert, J. (2000): Revista de Matemática de La Universidad del Zulia Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas Vol 8,1

Soluzione di Ercole Suppa.

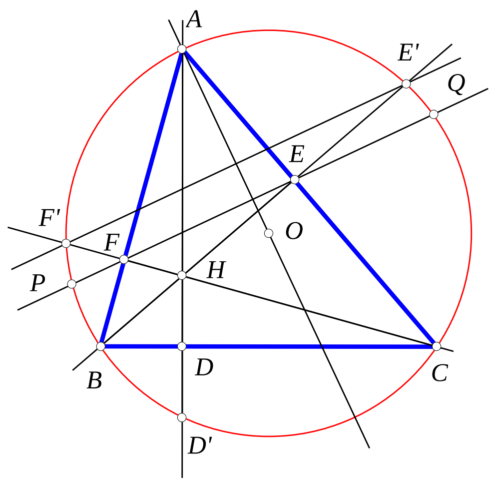

Figura 1

Indichiamo con H l'ortocentro e con D', E', F' i punti di intersezione delle rette AD, BE, CF con il cerchio (O) e ricordiamo, come è noto, che $DH = DD'$, $HE = EE'$, $HF = FF'$. Ad esempio per dimostrare che $DH = DD'$ è sufficiente osservare che

$$\angle HBD = \angle BDD' = \angle C$$

e che quindi i triangoli $\triangle HBD$, $\triangle D'BD$ sono congruenti.

(a) Dalle congruenze dei triangoli $\triangle AFH \equiv \triangle AFF'$, $\triangle AEH \equiv \triangle AEE'$ discende che $AF' = AH = AE'$; pertanto A appartiene all'asse di $E'F'$ e, essendo anche $OF' = OE'$, abbiamo che OA è l'asse di $E'F'$ e quindi $OA \perp E'F'$.
D'altra parte, dato che $F'H : FH = E'H : EH = 2$ abbiamo che $\triangle HFE$ è il corrispondente di $\triangle HF'E'$ in un'omotetia di centro H e rapporto $1/2$, quindi $EF \| E'F'$. Ne segue che $OA \perp EF$, ossia $OA \perp PQ$.

(b) Indichiamo con K, A' i punti di intesezione di OA con PQ ed (O), rispettivamente (Figura 2).

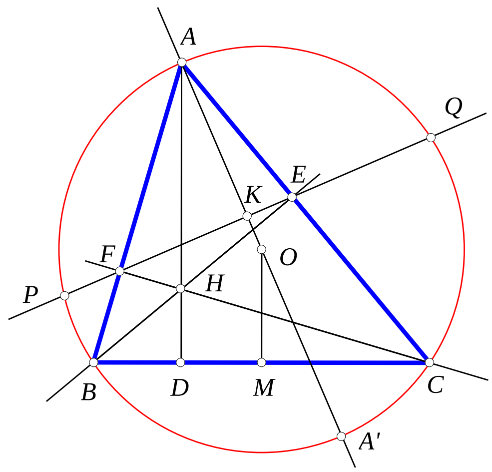

Figura 2

Dalla similitudine dei triangoli $\triangle AFH$ e $\triangle ABD$ abbiamo:

$$AF : AH = AD : AB \quad \Longrightarrow \quad AF = \frac{AH \cdot AD}{AB} \tag{1}$$

Dalla similitudine dei triangoli $\triangle AFE$ e $\triangle ACB$ abbiamo:

$$AF : AC = AK : AD \quad \Longrightarrow \quad AK = \frac{AF \cdot AD}{AC} \tag{2}$$

Dal secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo $\triangle APA'$, tenendo conto di (1), (2) e delle note relazioni $AB = 2 \cdot OA \sin C$, $AH = 2 \cdot OM$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
AP^2 &= 2 \cdot OA \cdot AK = \\
&= 2 \cdot OA \cdot \frac{AF \cdot AD}{AC} = \\
&= 2 \cdot OA \cdot \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AH \cdot AD}{AB} = \\
&= 2 \cdot OA \cdot \sin C \cdot \frac{AH \cdot AD}{AB} = \\
&= AB \cdot \frac{AH \cdot AD}{AB} = \\
&= AH \cdot AD = \\
&= 2 \cdot OM \cdot AD
\end{aligned}$$

□