Problema 504.- Un triángulo acutángulo *ABC* está inscrito en una circunferencia de centro *O*. Las alturas del triángulo son *AD, BE, CF*. La recta *EF* corta a la circunferencia circunscrita en *P* y *Q*.

(a) Demostrar que *OA* es perpendicular a *PQ*

(b) Si *M* es el punto medio de *BC*, pruebe que $AP \cdot AP = 2AD \cdot OM$

Resolución: Vicente Vicario García, I.E.S. "El Sur", Huelva.

Utilizaremos la notación habitual en la geometría del triángulo. Puesto que el triángulo dado *ABC* es acutángulo, es bien conocido que su circuncentro pertenece al interior del mismo.

(a) Consideremos el triángulo *DEF* formado por los pies de las alturas *AD*, *BE*, *CF* (triángulo órtico). Demostraremos que los segmentos *OA*, *OB* y *OC* son perpendiculares a los lados *FE*, *DF* y *DE* del triángulo órtico, respectivamente. Esto implica evidentemente que el segmento *OA* es perpendicular a *PQ*.

Consideremos el segmento que parte de *A* y es perpendicular al lado *FE* del triángulo órtico. Consideremos también el segmento que parte de *B* y es perpendicular al lado *DF* del mismo. Sea *P* el punto interior al triángulo en que se cortan estas dos líneas. Demostraremos que el punto *P* coincide con el circuncentro *O* del triángulo *ABC*.

Por la geometría del problema, es claro que

$$\angle BAP = A - \left(\frac{\pi}{2} - B\right) = A + B - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - C > 0$$

y de forma análoga

$$\angle ABP = B - \left(\frac{\pi}{2} - A\right) = B + A - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - C > 0$$

En consecuencia, el triángulo *ABP* es isósceles con $AP = BP$. Además tenemos que $\angle APB = \pi - 2\cdot(\pi/2 - C) = 2C$, y por tanto, como aplicación del teorema del ángulo inscrito, el punto *P* coincide con el circuncentro *O* del triángulo. Esto demuestra, como corolario que el segmento *OA* es perpendicular al segmento *PQ*.

(b) Por una parte, teniendo en cuenta la fórmula de Euler $abc = 4Rrs$ y relaciones elementales en el triángulo, la expresión del segundo miembro podemos ponerla en la forma

$$2AD \cdot OM = 2 \cdot h_a \cdot OM = 2 \cdot \frac{2\Delta}{a} \cdot R\cos A = \frac{4Rrs}{a}\cos A = bc\cos A \qquad [1]$$

Por otra parte, es fácil demostrar que los lados *AE*, *EF*, *FA* del triángulo *AEF* valen $c\cos A$, $a\cos A$, $b\cos A$, respectivamente. Así, el triángulo *AEF* es semejante al triángulo original *ABC*[†] con razón de semejanza $\cos A$. Si seguimos con la notación Δ para el área del triángulo, claramente, debido a la semejanza, podemos escribir

[†] Por razones similares, también lo son los triángulos *DEC* y *DBF*.

$$\Delta\cdot\cos^2 A=\frac{1}{2}a\cos A\cdot h_a{}' \to h_a{}'=\frac{2\Delta\cos A}{a}=\frac{2\Delta\cos A}{2RsenA}=\frac{\Delta}{R}\cot A$$

donde $h_a{}'$ es la altura del triángulo AEF relativa al lado EF. Entonces, llamando A' al pie de la perpendicular de $h_a{}'$ sobre el lado EF y $z=PQ/2$, y aplicando el teorema de los senos generalizado al triángulo ABC y el de Pitágoras en el AQA', entonces

$$z^2=R^2-\left(R-\frac{\Delta}{R}\cot A\right)^2=2\Delta\cot A-\frac{\Delta^2}{R^2}\cot^2 A$$

y, en consecuencia, aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras en el triángulo APA', tenemos que

$$AP^2=h_a{}'^2+z^2=\frac{\Delta^2}{R^2}\cot A+2\Delta\cot A-\frac{\Delta^2}{R^2}\cot A=2\Delta\cot A$$

Finalmente, y considerando [1], basta demostrar que se tiene la identidad siguiente

$$2\Delta\cot A=bc\cos A\Leftrightarrow\Delta=\frac{1}{2}bcsenA$$

lo que demuestra la proposición.

---oooOooo---